

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 33

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARE DEL PRIMO ORDINE

Un' EQUAZIONE DIFFERENZIALE è un'equazione dove compaiono una funzione incognita $y(x)$ e alcune sue derivate.

L'ordine massimo di derivazione di $y(x)$ è l'ORDINE dell'equazione differenziale.

EQ. DIFF. DEL 2° ORDINE

$$y''(x) + 2e^x y(x) = \sin(x)$$

LINEARE

EQ. DIFF. DEL 1° ORDINE

$$y'(x) + x y^2(x) = \frac{1}{x}$$

NON LINEARE

EQ. DIFF. DEL 3° ORDINE

$$y'''(x) = \sqrt{x} y(x) + y'(x) + 2$$

LINEARE

EQ. DIFF. DEL 2° ORDINE

$$y''(x) = y(x) y'(x) + \log(x)$$

NON LINEARE

Risolvere un'equazione differenziale significa trovare tutte le soluzioni (se esistono).

Un semplice esempio è

$$y'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

EQ. DIFF. DEL 1° ORDINE
LINEARE

dove si nota subito che le soluzioni sono le primitive di $\frac{1}{1+x^2}$ e integrando si ottengono infinite soluzioni:

$$y(x) = \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctg(x) + c \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Una generica EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARE DEL PRIMO ORDINE ha la seguente forma

$$y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \quad (*)$$

dove f e a sono funzioni continue in un certo intervallo I .

Per risolvere l'equazione si moltiplicano i due membri di $(*)$ per il FATTORE INTEGRANTE $e^{A(x)}$

dove $A(x)$ è una primitiva di $a(x)$.

$$\underbrace{e^{A(x)} \cdot y'(x) + e^{A(x)} a(x) y(x)}_{\frac{d}{dx}(e^{A(x)} \cdot y(x))} = e^{A(x)} f(x)$$

Riconosciuta la derivata a sinistra, ora basta integrare

$$e^{A(x)} \cdot y(x) = \int \frac{d}{dx}(e^{A(x)} \cdot y(x)) dx = \int e^{A(x)} f(x) dx$$

e si arriva alla SOLUZIONE GENERALE

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} f(x) dx + c \right)$$

infinita
soluzioni

dove c è la solita costante additiva dell'integrazione indefinita che qui è stata messa in evidenza.

ESEMPIO

- Trovare la soluzione generale di

$$y'(x) + y(x) = x.$$

Una primitiva di $q(x)=1$ è $A(x)=x$. Allora il fattore integrante è $e^{A(x)} = e^x$.

Quindi

$$\begin{aligned}\int e^{A(x)} f(x) dx &= \int e^x x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + c\end{aligned}$$

e così la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} f(x) dx \right) = e^{-x} (x e^x - e^x + c)$$

da cui

$$y(x) = x - 1 + c e^{-x}.$$

OSSERVAZIONE

Tra le infinite soluzioni si possono selezionare quelle che soddisfanno ulteriori condizioni.

Imporre la condizione $y(x_0) = y_0$ dove (x_0, y_0) è un punto assegnato significa risolvere il PROBLEMA DI CAUCHY:

$$\begin{cases} y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Tornando all'esempio precedente con soluzione generale

$$y(x) = x - 1 + Ce^{-x}$$

risolviamo i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = x \\ y(-1) = -2 \end{cases}$$

$$-2 = y(-1) = -1 - 1 + Ce^1$$

$$\Rightarrow C = 0 \quad \boxed{y(x) = x - 1}$$

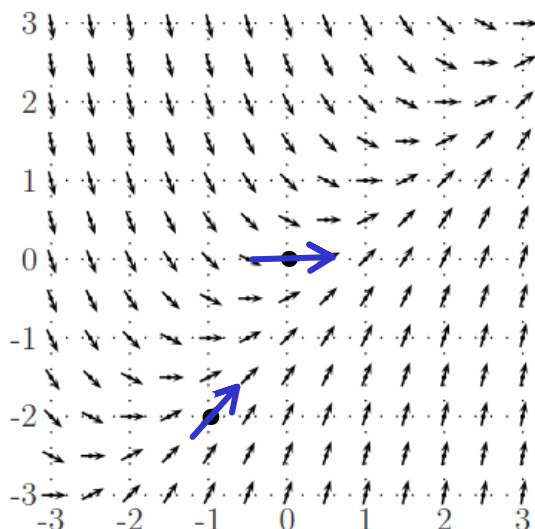
$$\begin{cases} y'(x) + y(x) = x \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$0 = y(0) = 0 - 1 + Ce^0$$

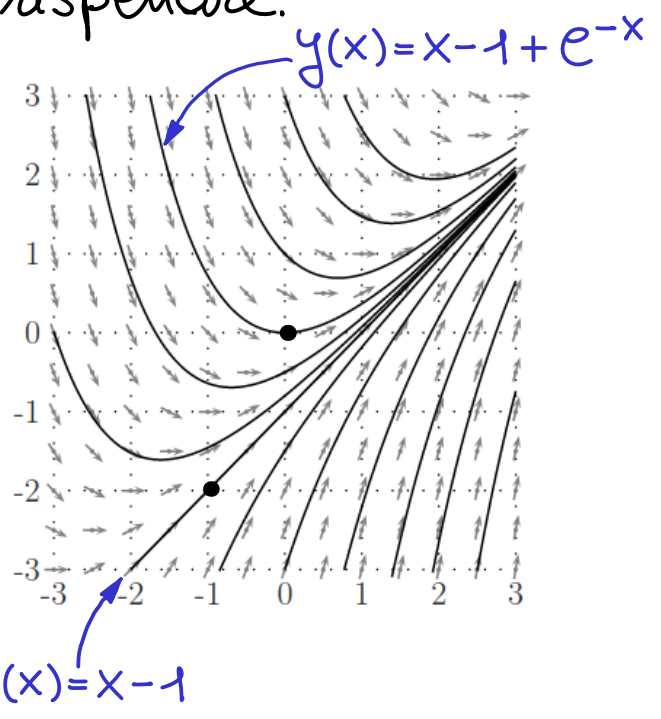
$$\Rightarrow C = 1 \quad \boxed{y(x) = x - 1 + e^{-x}}$$

Si noti che se una soluzione di $y'(x) + y(x) = x$ passa per (x_0, y_0) allora $y'(x_0) = x_0 - y_0$ ossia è nota l'inclinazione della retta tangente al grafico di $y(x)$ in quel punto.

Così variando (x_0, y_0) otteniamo un "campo di direzioni" che le soluzioni dell'equazione differenziale dovranno rispettare.



$$\begin{aligned} \text{In } (-1, -2): y' &= -1 - (-2) = 1 \\ \text{In } (0, 0): y' &= 0 - 0 = 0 \end{aligned}$$



ESEMPI

- Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) - \frac{y(x)}{e^x + 1} = e^x \\ y(0) = -1 \end{cases}$$

Calcolo di una primitiva di $a(x) = -\frac{1}{e^x + 1}$:

$$\begin{aligned} A(x) &= -\int \frac{1}{e^x + 1} dx = -\int \frac{1}{t+1} \cdot \frac{dt}{t} = \int \left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t} \right) dt \\ &= \log|t+1| - \log|t| \\ &= \log\left|1 + \frac{1}{t}\right| = \log(1 + e^{-x}). \end{aligned}$$

$t = e^x, \log(t) = x$
 $\frac{dt}{t} = dx$

Allora il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = 1 + e^{-x}.$$

Quindi

$$\begin{aligned} \int e^{A(x)} \cdot f(x) dx &= \int (1 + e^{-x}) e^x dx = \int (e^x + 1) dx \\ &= e^x + x + c \end{aligned}$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} \cdot f(x) dx \right) = \frac{e^x + x + c}{1 + e^{-x}}$$

Infine imponiamo la condizione $y(0) = -1$:

$$-1 = y(0) = \frac{e^0 + 0 + c}{1 + e^{-0}} = \frac{1 + c}{2} \Rightarrow c = -3.$$

Così la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{e^x + x - 3}{1 + e^{-x}}.$$

- Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 4x^2 \\ y(-1) = -2 \end{cases}$$

nell'intervallo $(-\infty, 0)$.

Una primitiva di $a(x) = \frac{1}{x}$ è $A(x) = \log|x|$.

Allora il fattore integrante in $(-\infty, 0)$ è

$$e^{A(x)} = e^{\log|x|} = |x| = -x.$$

Quindi

$$\int e^{A(x)} f(x) dx = \int (-x) \cdot 4x^2 dx = -\int 4x^3 dx = -x^4 + c$$

e la soluzione generale in $(-\infty, 0)$ è

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(\int e^{A(x)} f(x) dx \right) = -\frac{1}{x} (-x^4 + c) = x^3 - \frac{c}{x}.$$

Infine imponiamo la condizione $y(-1) = -2$:

$$-2 = y(-1) = (-1)^3 - \frac{c}{(-1)} = -1 + c \Rightarrow c = -1.$$

Così la soluzione cercata è

$$y(x) = x^3 + \frac{1}{x} \quad \forall x \in (-\infty, 0).$$