ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 32

ESEMPI

- Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2+\frac{1}{\overline{z}}=2+i.$$

Si ha che

$$\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)(1+i)}{|1-i|^2}=\frac{1}{2}(\cancel{1}+2i+\cancel{i^2})=i \Rightarrow \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2=i^2=-1$$

e così l'equazione diventa

$$\frac{1}{\overline{z}}=3+i, \quad \overline{z}=\frac{1}{3+i}=\frac{3-i}{|3+i|^2}=\frac{3-i}{9+1}=\frac{3-i}{10}$$

e quindi la soluzione è $z=\overline{(\overline{z})}=\frac{3+i}{10}$.

- Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z(\overline{z}+2)=2(z+|3-4i|).$$

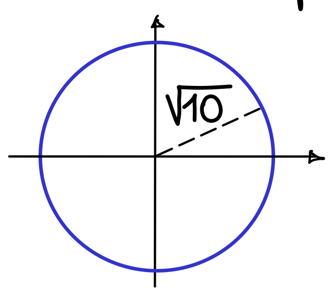
Intanto

$$|3-4i|=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

e ricordando che $z\cdot\overline{z}=|z|^2$ si ha

$$|z|^2+\cancel{2z}=\cancel{2z}+10, \quad |z|^2=10, \quad |z|=\sqrt{10}$$

da cui ci sono infinite soluzioni: i punti della circonferenza $|z|=\sqrt{10}$



- Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

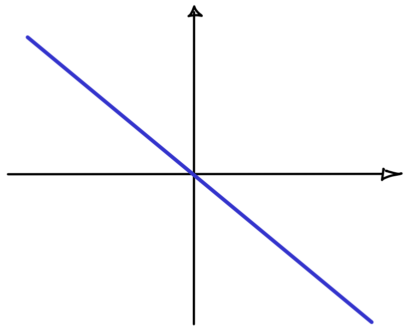
$$\mathrm{Im}(z^2) + |z|^2 = 0.$$

Poniamo $z = x + iy$. Allora $|z|^2 = x^2 + y^2$ e

$$z^2 = (x+iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy \Rightarrow \mathrm{Im}(z^2) = 2xy.$$

Così l'equazione diventa

$$2xy + x^2 + y^2 = 0 \,, \quad (x+y)^2 = 0 \,, \quad y = -x$$



Ci sono infinite soluzioni:

$$z = x - ix \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ossia i punti della retta $y = -x$.

- Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$|z| = |z - 2i|.$$

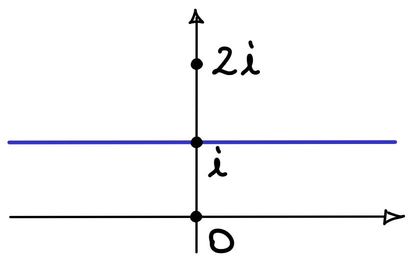
Poniamo $z = x + iy$. Allora $z - 2i = x + i(y-2)$ e l'equazione diventa

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-2)^2},$$

$$\cancel{x^2} + \cancel{y^2} = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + 4 \,, \quad y = 1$$

Quindi le soluzioni sono:

$$z = x + i \quad \forall x \in \mathbb{R}$$



tutti i punti della retta $y = 1$.

Sono i punti z che hanno la stessa distanza da 0 e $2i$, ossia $|z| = |z - 2i|$.

OSSERVAZIONE

Per l'equazione di secondo grado

$$\underbrace{a}_{\neq 0}z^2+bz+c=0 \quad \text{con } a,b,c\in\mathbb{C}$$

continua a valere la formula risolutiva

$$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{con } \Delta=b^2-4ac$$

dove, se $\Delta\neq 0$, $\pm\sqrt{\Delta}$ rappresenta le due radici quadrate di $\Delta=|\Delta|e^{i\varphi}$ ossia $\pm\sqrt{|\Delta|}e^{i\varphi/2}$.

- Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$2z(z+4i)=8-i.$$

L'equazione si riscrive come

$$\overset{a}{2}z^2+\overset{b}{8i}z+(-8\overset{c}{+}i)=0$$

Allora

$$\Delta=(8i)^2-4\cdot 2(-8+i)=-64+64-8i=-8i=8e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

le cui radici quadrate sono

$$\pm\sqrt{8}\,e^{i\frac{3\pi}{4}}=\pm 2\sqrt{2}\,(\overset{-1/\sqrt{2}}{\cos(\tfrac{3\pi}{4})}+i\,\overset{1/\sqrt{2}}{\operatorname{sen}(\tfrac{3\pi}{4})})=\pm 2(-1+i).$$

Così

$$z_{1,2}=\frac{1}{4}(-8i\pm 2(-1+i)) \quad \begin{cases} z_1=-\dfrac{1+3i}{2} \\[2ex] z_2=\dfrac{1-5i}{2}\end{cases}$$

- Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$|z|^8 = 16 z^4.$$

Applicando il modulo ad entrambi i membri si ha $|z|^8 = |16 z^4| = 16|z|^4$, $|z|^4(|z|^4-16)=0$ da cui $|z|=0$ e $|z|=2$.

1) Se $|z|=0$ allora $z=0$ che è soluzione.

2) Se $|z|=2$ allora l'equazione diventa $2^8 = 16 z^4$ ossia $z^4=16$ che è risolta dalle radici quarte di $16 = 16e^{i0}$

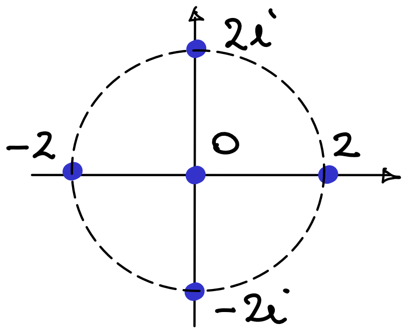
$$z_k = \sqrt[4]{16}\exp\left(i\,\frac{0+2k\pi}{4}\right) \quad \text{con } k=0,1,2,3$$

che in forma cartesiana si scrivono come

$$z_0=2,\ z_1=2i,\ z_2=-2,\ z_3=-2i$$

In conclusione le soluzioni sono 5:

$0, 2, 2i, -2, -2i$



$z^4=16$ si può anche risolvere così

$$0 = z^4-16 = (z^2-4)(z^2+4) = (z-2)(z+2)(z-2i)(z+2i)$$

e le soluzioni sono $2, 2i, -2, -2i$.

OSSERVAZIONE

Dalla formula di Eulero

$$e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$$

si ottengono le relazioni

$$\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos(x)+i\,\mathrm{sen}(x)+\cos(-x)+i\,\mathrm{sen}(-x)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos(x)+i\,\cancel{\mathrm{sen}}(x)+\cos(x)-i\,\cancel{\mathrm{sen}}(x)\right)$$
$$= \cos(x)$$

$$\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\cos(x)+i\,\mathrm{sen}(x)-\cos(-x)-i\,\mathrm{sen}(-x)\right)$$
$$= \frac{1}{2i}\left(\cancel{\cos}(x)+i\,\mathrm{sen}(x)-\cancel{\cos}(x)+i\,\mathrm{sen}(x)\right)$$
$$= \mathrm{sen}(x).$$

- $\int \cos^2(x)\,dx$?

Dato che

$$\cos^2(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2ix}+2+e^{-2ix}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(\cos(2x)+1\right)$$

si ha

$$\int \cos^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{2}\int 1\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\mathrm{sen}(2x) + \frac{x}{2} + C$$

- $\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx \quad ?$

Dato che $\quad (a-b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

$$\operatorname{sen}^4(x) = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 = \frac{1}{16}\left(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\cos(4x) - 4\cos(2x) + 3\right)$$

si ha

$$\int \operatorname{sen}^4(x)\,dx = \frac{1}{8}\int \cos(4x)\,dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{3}{8}\int dx$$

$$= \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{3}{8}x + C$$

- $\int e^x \cos(x)\,dx \; ? \qquad \int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx \; ?$

Invece che integrare per parti usiamo la formula di Eulero: $\cos(x) + i\operatorname{sen}(x) = e^{ix}$

$$\int e^x \cos(x)\,dx + i\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = \int e^x \cdot e^{ix}\,dx$$

$$= \int e^{x(1+i)}\,dx = \frac{e^{x(1+i)}}{1+i} + (C_1 + iC_2)$$

$$= \frac{1-i}{|1+i|^2}\, e^x\left(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x)\right) + (C_1 + iC_2)$$

$$= \frac{e^x}{2}\left(\cos(x) + i\operatorname{sen}(x) - i\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\right) + (C_1 + iC_2)$$

e separando parte reale e immaginaria si ha

$$\int e^x \cos(x)\,dx = \frac{e^x}{2}\left(\cos(x) + \operatorname{sen}(x)\right) + C_1$$

$$\int e^x \operatorname{sen}(x)\,dx = \frac{e^x}{2}\left(\operatorname{sen}(x) - \cos(x)\right) + C_2$$