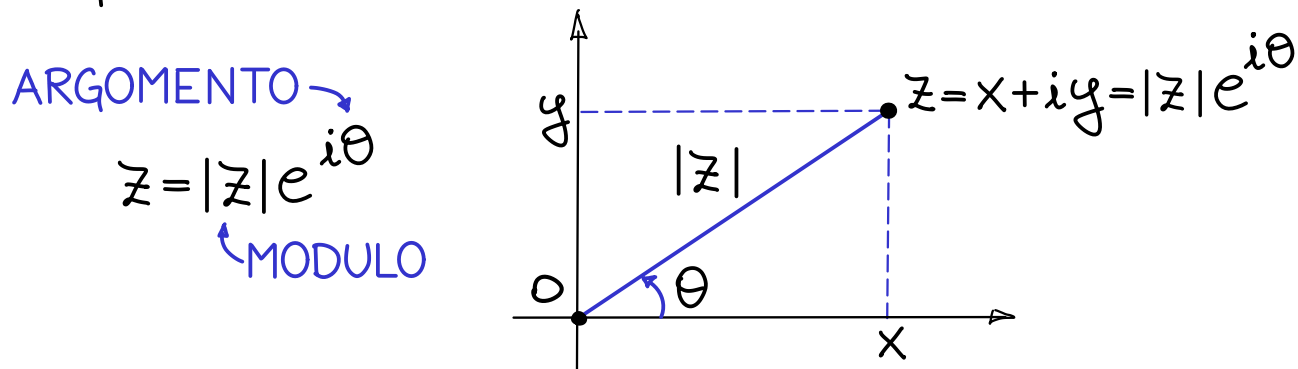


## ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 31

Un altro modo di rappresentare un numero complesso  $z \neq 0$  è la FORMA ESPONENZIALE:



L'ARGOMENTO  $\theta$  è "un" angolo orientato, espresso in radianti, dalla semiretta positiva dell'asse reale alla semiretta da 0 a  $z$ .  $\theta$  è determinato a meno di multipli interi di  $2\pi$ :

ARGOMENTO PRINCIPALE  $\rightarrow$

$$\theta = \theta_p + 2\pi k \text{ con } k \in \mathbb{Z} \text{ con } \theta_p \in (-\pi, \pi].$$

Per la conversione dalla forma esponenziale a quella cartesiana e viceversa valgono le seguenti formule:

ESP  $\rightarrow$  CART

$$\begin{cases} x = |z| \cos(\theta) \\ y = |z| \sin(\theta) \end{cases}$$

CART  $\rightarrow$  ESP

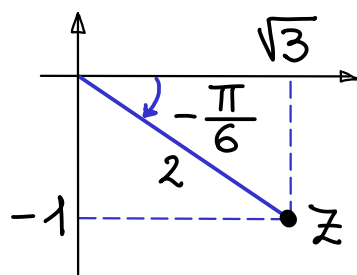
$$\begin{cases} |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta_p = \begin{cases} \arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) & \text{se } y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{|z|}\right) & \text{se } y < 0 \end{cases} \end{cases}$$

## ESEMPI

- $z = \sqrt{3} - i$

$$\begin{cases} |z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \theta = -\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

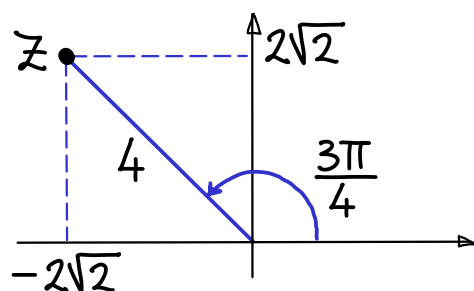
$$\text{così } z = |z|e^{i\theta} = 2e^{-i\frac{\pi}{6}}$$



- $z = 4e^{i\frac{3\pi}{4}}$

$$\begin{cases} x = 4\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} \\ y = 4\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{così } z = x + iy = -2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}.$$



OSSERVAZIONE L'identità

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

è detta FORMULA DI EULERO. L'uso del simbolo  $e^{i\theta}$  è motivato dalle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot (\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= (\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

In particolare la potenza  $n$ -sima di  $z$

$$\text{si scrive come } z^n = (|z|e^{i\theta})^n = |z|^n e^{in\theta}$$

## RADICI M-SIME DI UN NUMERO COMPLESSO

Consideriamo l'equazione

$$z^m = w$$

dove  $w \in \mathbb{C}$  e  $m > 0$  è un intero, da risolvere rispetto a  $z \in \mathbb{C}$ . Ogni soluzione  $z$  si dice RADICE M-SIMA di  $w$ .

Se  $w=0$  allora  $z=0$  è l'unica radice m-sima con molteplicità  $m$ .

Se  $w \neq 0$  allora ci sono  $m$  radici m-sime  $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$  ciascuna con molteplicità 1.

Per trovarle usiamo la forma esponenziale di  $z$  e  $w$ :  $z = |z|e^{i\theta}$ ,  $w = |w|e^{i\varphi}$ .

Così l'equazione

$$|z|^m e^{im\theta} = z^m = w = |w|e^{i\varphi}$$

è equivalente a

$$\begin{cases} |z|^m = |w| \\ m\theta = \varphi + 2K\pi, K \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad \begin{cases} |z| = \sqrt[m]{|w|} \\ \theta_k = \frac{\varphi + 2K\pi}{m} \quad K = 0, 1, \dots, m-1 \end{cases}$$

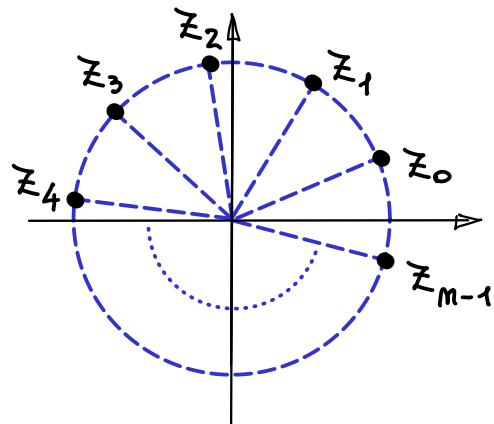
*uguali e meno di angoli giri*      *argomenti non equivalenti*

da cui

$$z_k = \sqrt[m]{|w|} \exp\left(i \frac{\varphi + 2K\pi}{m}\right) \quad K = 0, 1, \dots, m-1$$

## OSSERVAZIONE

Le radici  $m$ -sime di  $W$   
 $z_0, z_1, \dots, z_{m-1}$  sono i  
vertici di un poligono  
regolare di  $m$ -lati.



Se  $m=2$  e  $W \neq 0$  le 2 radici quadrate sono

$$z^2 = W = |W|e^{i\varphi} \begin{cases} z_0 = \sqrt{|W|} e^{i\varphi/2} \\ z_1 = \sqrt{|W|} e^{i(\varphi+2\pi)/2} = z_0 e^{i\pi} = -z_0 \end{cases} \leftarrow \text{opposte}$$

## ESEMPI

- Calcolare le radici terze di  $8i$  ossia risolvere  
 $z^3 = 8i$ .

Abbiamo che  $8i = |8i| e^{i\frac{\pi}{2}} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$  e quindi le  
sue radici terze sono

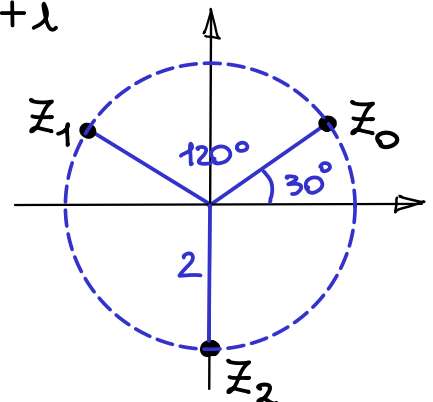
$$z_k = \sqrt[3]{8} \exp\left(i \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) \text{ con } k=0,1,2$$

che in forma cartesiana si scrivono come

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2(\cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6})) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$$



- Risolvere  $z^4 = -4$  (radici quarte di  $-4$ ).

Si ha che  $-4 = 4e^{i\pi}$  e radici quarte sono

$$z_k = \sqrt[4]{4} \exp\left(i \frac{\pi + 2k\pi}{4}\right) \text{ con } k=0,1,2,3$$

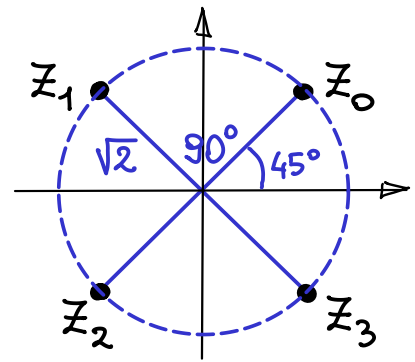
che in forma cartesiana si scrivono come

$$z_0 = \sqrt{2} e^{\frac{i\pi}{4}} = \sqrt{2} (\overset{1/\sqrt{2}}{\cos(\frac{\pi}{4})} + i \overset{1/\sqrt{2}}{\sin(\frac{\pi}{4})}) = 1 + i$$

$$z_1 = \sqrt{2} e^{\frac{i3\pi}{4}} = iz_0 = -1 + i$$

$$z_2 = \sqrt{2} e^{\frac{i5\pi}{4}} = (i)^2 z_0 = -1 - i$$

$$z_3 = \sqrt{2} e^{\frac{i7\pi}{4}} = (i)^3 z_0 = 1 - i$$



- Risolvere  $z^6 = 1$  (radici seste di 1)

Si ha che  $1 = |1|e^{i0} = 1e^{i0}$  e le radici seste sono

$$z_k = \sqrt[6]{1} \exp\left(i \frac{0 + 2k\pi}{6}\right) \text{ con } k=0,1,2,3,4,5$$

che in forma cartesiana si scrivono come

$$z_0 = e^{i0} = 1 = -z_3$$

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -z_4$$

$$z_2 = e^{i\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = -z_5$$

