

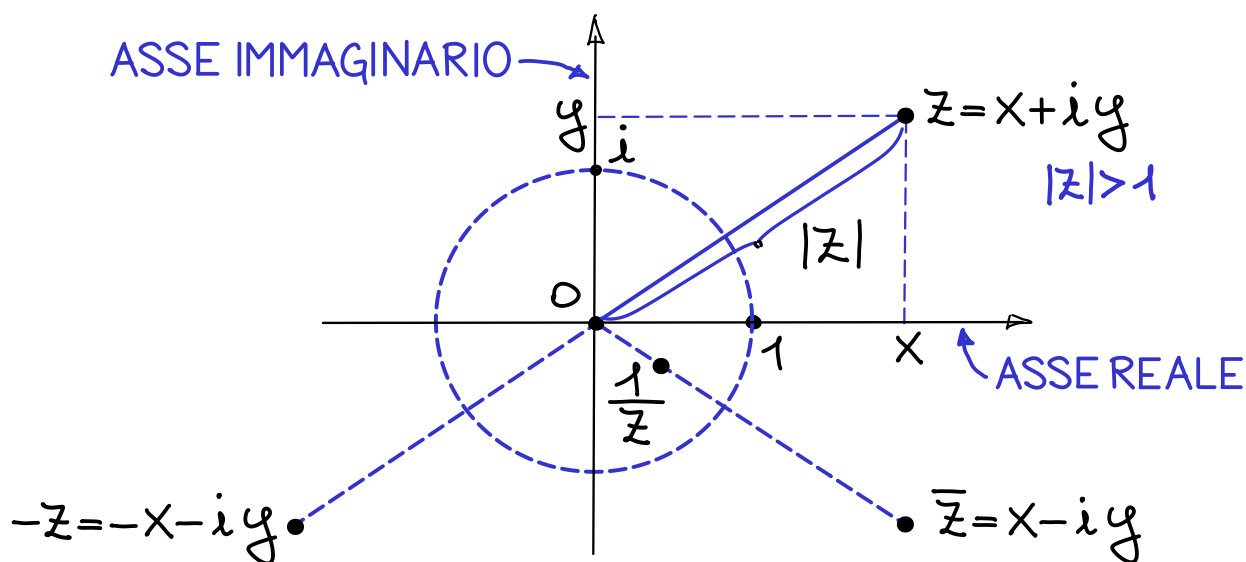
ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 30

NUMERI COMPLESSI

L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ si estende all'insieme $\mathbb{C}$ dei NUMERI COMPLESSI

$$\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$$

dove il simbolo i indica l'UNITÀ IMMAGINARIA. Ogni numero complesso $z = x + iy$ è individuato da una coppia ordinata $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e dunque si può rappresentare come un punto nel PIANO COMPLESSO $\mathbb{C}$.



Notazioni: $z = x + iy$ FORMA CARTESIANA di z

$\operatorname{Re}(z) = x$ PARTE REALE di z

$\operatorname{Im}(z) = y$ PARTE IMMAGINARIA di z

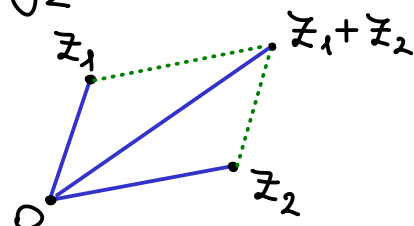
$\bar{z} = x - iy$ CONIUGATO di z

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ MODULO di z

In $\mathbb{C}$ sono definite due operazioni ossia la SOMMA e il PRODOTTO le cui proprietà rendono $\mathbb{C}$ un CAMPO non ordinato.

SOMMA: se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ allora

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$



L'elemento neutro è $0 = 0 + i0$

L'opposto di $z = x + iy$ è $-z = -x - iy$.

PRODOTTO: se $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ allora

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)$$

$$= x_1 x_2 + iy_1 x_2 + ix_1 y_2 + \boxed{i \cdot i} y_1 y_2$$

$\leftarrow -1$ definizione

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

L'elemento neutro è $1 = 1 + i0$.

Il reciproco di $z = x + iy \neq 0$ è

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2}$$

dove

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + \cancel{ixy} - \cancel{ixy} - i^2 y^2 \\ &= x^2 + y^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE

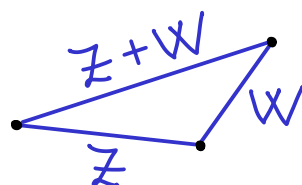
Altre proprietà del coniugio e del modulo:

$$1) \overline{(\overline{z})} = z, \overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}, \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, |z| = |\overline{z}|$$

$$2) \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z}), \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$$

$$3) |zw| = |z| \cdot |w|, |z+w| \leq |z| + |w|$$

DISUGUAGLIANZA
TRIANGOLARE



ESEMPI

$$\bullet (2+3i) + (-3+4i) = (2-3) + i(3+4) = -1+7i$$

$$\begin{aligned} \bullet (2+3i) \cdot (-3+4i) &= -6 + 8i - 9i + 12i^2 \\ &= (-6-12) + i(8-9) \\ &= -18-i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{2+3i}{-3+4i} &= (2+3i) \cdot \frac{1}{-3+4i} = (2+3i) \cdot \frac{-3-4i}{|-3+4i|^2} \\ &= \frac{1}{25}(-6-8i-9i-12i^2) \quad \hookrightarrow (-3)^2+4^2=25 \\ &= \frac{1}{25}((-6+12)+i(-8-9)) = \frac{6}{25} - i\frac{17}{25} \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ Risolvere } 2iz+3=4+i.$$

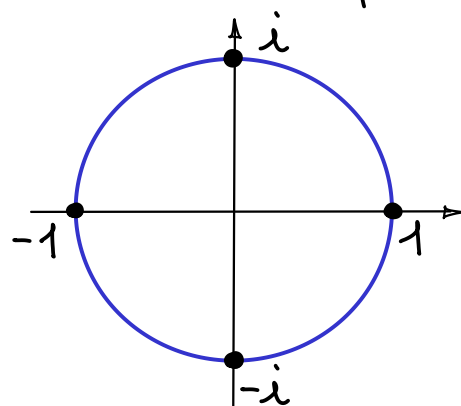
$$\begin{aligned} 2iz &= 4+i-3 = 1+i \Rightarrow z = \frac{1+i}{2i} = \frac{1+i}{2i} \cdot \frac{-2i}{-2i} \\ &= \frac{1-i}{2} \end{aligned}$$

- Calcolare i^m per $m \in \mathbb{Z}$

$$i^m = \begin{cases} (i^2)^{\frac{m}{2}} = (-1)^{\frac{m}{2}} & \text{se } m \text{ è pari} \\ i^{\overbrace{m-1}^{\text{pari}}} \cdot i = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot i & \text{se } m \text{ è dispari} \end{cases}$$

in altri termini se $m \equiv r \pmod{4}$ con $r \in \{0, 1, 2, 3\}$ il resto della divisione di m per 4

$$i^m = \begin{cases} 1 & \text{se } m \equiv 0 \pmod{4} \\ i & \text{se } m \equiv 1 \pmod{4} \\ -1 & \text{se } m \equiv 2 \pmod{4} \\ -i & \text{se } m \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

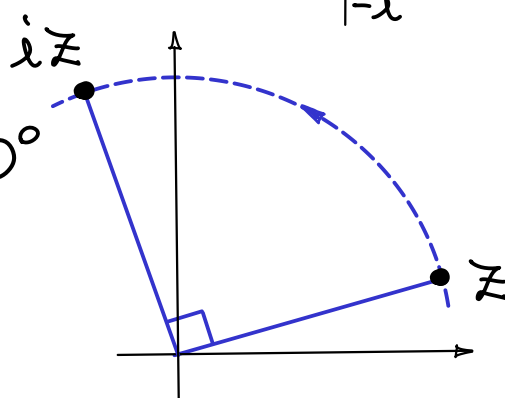


Se $z = x + iy \neq 0$ allora

$iz = -y + ix$ è ruotato di 90°

in senso anti-orario

rispetto a z .



OSSERVAZIONE

Sia $a \in \mathbb{R}$ e consideriamo l'equazione $x^2 = a$ con $x \in \mathbb{R}$ allora abbiamo tre casi:

- 1) se $a > 0$ ci sono DUE SOLUZIONI $x_1 = +\sqrt{a}$, $x_2 = -\sqrt{a}$.
- 2) se $a = 0$ c'è UNA SOLUZIONE DOPPIA $x_1 = x_2 = 0$.
- 3) se $a < 0$ NESSUNA SOLUZIONE perché $x^2 \geq 0$ in $\mathbb{R}$.

In $\mathbb{C}$ la situazione cambia.

Sia $a \in \mathbb{R}$ e consideriamo l'equazione $z^2 = a$
con $z = x + iy \in \mathbb{C}$ allora l'equazione diventa

$$(x+iy)^2 = \overbrace{(x^2 - y^2)}^{\text{PARTE REALE}} + i \overbrace{(2xy)}^{\text{PARTE IMMAGINARIA}} = a + i \cdot 0$$

ossia

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = -a \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 = a \\ y = 0 \end{cases}$$

$\hookrightarrow x=0 \vee y=0$

Se $a \geq 0$ allora $x = \pm\sqrt{a}$ e $y = 0 \Rightarrow z = \pm\sqrt{a}$

Se $a < 0$ allora $y = \pm\sqrt{|a|}$ e $x = 0 \Rightarrow z = \pm i\sqrt{|a|}$

Riassumendo

1) se $a > 0$ ci sono DUE SOLUZIONI

$$z_1 = +\sqrt{a}, z_2 = -\sqrt{a} \quad \text{reali}$$

2) se $a = 0$ c'è UNA SOLUZIONE DOPPIA

$$z_1 = z_2 = 0 \quad \text{reali}$$

3) se $a < 0$ ci sono DUE SOLUZIONI

$$z_1 = +i\sqrt{|a|}, z_2 = -i\sqrt{|a|} \quad \text{complesse coniugate}$$

Così l'equazione $z^2 = -9$, che in $\mathbb{R}$ non ha soluzioni, in $\mathbb{C}$ ha due soluzioni
ossia $3i$ e $-3i$.

Come si risolve un'equazione di secondo grado con coefficienti $a, b, c \in \mathbb{R}$

$$\underbrace{a}_{\neq 0} z^2 + bz + c = 0 \quad \text{con } z \in \mathbb{C}?$$

Riduciamo l'equazione al caso precedente

$$z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a} = 0, \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

completiamo il quadrato

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{\Delta}{4a^2} \quad \text{con } \Delta = b^2 - 4ac$$

DELTA

Così per quanto detto, si ha che

1) se $\Delta > 0$ ci sono DUE SOLUZIONI REALI

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2) se $\Delta = 0$ c'è UNA SOLUZIONE DOPPIA REALE

$$z_1 = z_2 = -\frac{b}{2a}$$

3) se $\Delta < 0$ ci sono DUE SOLUZIONI COMPLESSE

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}, \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \text{CONIUGATE}$$

In ogni caso si arriva alla fattorizzazione

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

ESEMPI

- Risolvere in $\mathbb{C}$

$$z^2 - z - 1 = 0.$$

Dato che

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (-1) = 5 > 0$$

le soluzioni sono due e sono reali

$$z_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

e vale la fattorizzazione

$$z^2 - z - 1 = \left(z - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(z - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right).$$

- Risolvere in $\mathbb{C}$

$$z^2 - z + 1 = 0.$$

Dato che

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot (+1) = -3 < 0$$

le soluzioni sono due e sono complesse coniugate

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad z_2 = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

e vale la fattorizzazione

$$z^2 - z + 1 = \left(z - \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \left(z - \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

OSSERVAZIONE I polinomi di secondo grado irriducibili in $\mathbb{R}$ sono riducibili in $\mathbb{C}$.