

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 29

ESEMPI

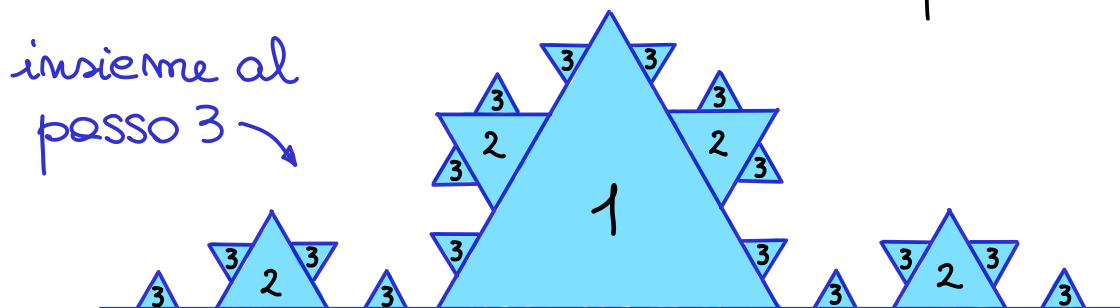
- Il FRATTALE DI KOCH è un insieme ottenuto con la seguente costruzione ricorsiva.

Passo base $n=0$: si traccia un segmento di lunghezza 1.

Passo ricorsivo $n \geq 1$: si divide ogni lato dell'insieme ottenuto al passo $n-1$ in 3 parti uguali e si "incolla" sulla parte centrale un triangolo equilatero. Quanto vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

dove S_n è l'area dell'insieme al passo n ?



$n=0$, segmento, $S_0=0$

area triangolo equilatero di lato 1

$n=1$, 1 triangolo di lato $\frac{1}{3}$, $S_1 = S_0 + 1 \cdot T \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$n=2$, 4 triangoli di lato $\frac{1}{3^2}$, $S_2 = S_1 + 4 \cdot T \cdot \left(\frac{1}{3^2}\right)^2$

$n=3$, 4^2 triangoli di lato $\frac{1}{3^3}$, $S_3 = S_2 + 4^2 \cdot T \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right)^2$

$\vdots$

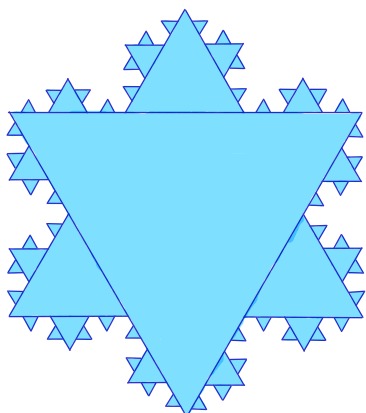
n , 4^{n-1} triangoli di lato $\frac{1}{3^n}$, $S_n = S_{n-1} + 4^{n-1} \cdot T \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2$

Quindi per $n \rightarrow \infty$

$$S_n = \sum_{k=1}^n 4^{k-1} \cdot T \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{T}{4} \cdot \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{9}\right)^k \rightarrow \frac{T}{4} \cdot \frac{4/9}{1-4/9} = \frac{T}{5}.$$

dato che $T = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ si conclude che il limite vale $\frac{T}{5} = \frac{\sqrt{3}}{20}$.

Se si "incollamo" tre copie del frattale sui lati di un triangolo equilatero di lato 1 si ottiene una figura a "fiocco di neve" di area



$$A = T + 3 \cdot \frac{T}{5} = \frac{8}{5} \cdot T = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

e perimetro

$$P = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^n \cdot 3 = +\infty.$$

ad ogni passo il perimetro aumenta di un fattore $4/3$

- Convertire in frazione il numero decimale

$$0.\overline{681} = 0.6818181\dots$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} 0.\overline{81} &= \frac{81}{100} + \frac{81}{100^2} + \frac{81}{100^3} + \dots \\ &= 81 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{100^k} = 81 \cdot \frac{1/100}{1-1/100} = \frac{81}{99} = \frac{9}{11}. \end{aligned}$$

Così

$$0.\overline{681} = \frac{1}{10} (6 + 0.\overline{81}) = \frac{1}{10} \left(6 + \frac{9}{11}\right) = \frac{75}{110} = \frac{15}{22}.$$

- $\sum_{k=1}^{\infty} |\arctg(\sin(k))|^k$ converge? Sì

Notiamo che $|\arctg(\overbrace{\sin(k)}^{\in [-1,1]})| \leq \arctg(1) = \frac{\pi}{4}$ e

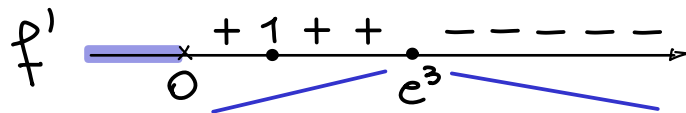
quindi $|\arctg(\sin(k))|^k \leq (\pi/4)^k$.

Dato che $\pi/4 \in (-1,1)$, $\sum_{k=1}^{\infty} (\pi/4)^k$ converge e per confronto anche la serie data converge.

- $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(\log(k))^3}{k}$ converge? Sì

Sia $f(x) = \frac{(\log(x))^3}{x}$ allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ e

$$f'(x) = 3(\log(x))^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \cdot (\log(x))^3 = \frac{(\log(x))^2}{x^2} (3 - \log(x))$$



Quindi $a_k = f(k) = \frac{(\log(k))^3}{k}$ tende a 0 ed è definitivamente decrescente. Allora la serie data $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$ converge per il criterio di Leibniz.

OSSERVAZIONE

Si noti che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log(k))^3}{k} = +\infty$ ($\alpha=1, \beta=-3 \leq 1$)

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! 4^k}{k^k}$ converge? NO

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\overbrace{(k+1)!}^{k+1} \overbrace{4^{k+1}}^{k+1}}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{\cancel{k!} \cancel{4^k}} = \frac{4}{(1+\frac{1}{k})^k} \rightarrow \frac{4}{e}$$

$\frac{4}{e} > 1$ e quindi la serie diverge a $+\infty$.

- Per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9^x - 1}{\sqrt{9^x + 1}} \right)^k \text{ è convergente?}$$

La serie data è geometrica e la condizione di convergenza è

$$\begin{aligned} \left| \frac{9^x - 1}{\sqrt{9^x + 1}} \right| < 1 &\Leftrightarrow |9^x - 1| < \sqrt{9^x + 1} \Leftrightarrow (9^x - 1)^2 < 9^x + 1 \\ &\Leftrightarrow 9^{2x} - 2 \cdot 9^x + 1 < 9^x + 1 \Leftrightarrow 9^x(9^x - 3) < 0 \\ &\Leftrightarrow 9^x < 3 \Leftrightarrow x \log(9) < \log(3) \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- Per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^a}{(\sqrt[k]{k} - 1)^4} \text{ è convergente?}$$

Si ha che $\sqrt[k]{k} - 1 = \exp\left(\frac{\log(k)}{k}\right) - 1 \sim \frac{\log(k)}{k}$ e

$$\frac{k^a}{(\sqrt[k]{k} - 1)^4} \sim \frac{1}{k^{-4-a} \log^4(k)}$$

Così per il confronto asintotico la serie

converge se $-4-a \geq 1$ ossia $a \leq -5$ ($\alpha = -4-a$, $\beta = 4 > 1$).

- Per quali $a \in \mathbb{R}$ la serie

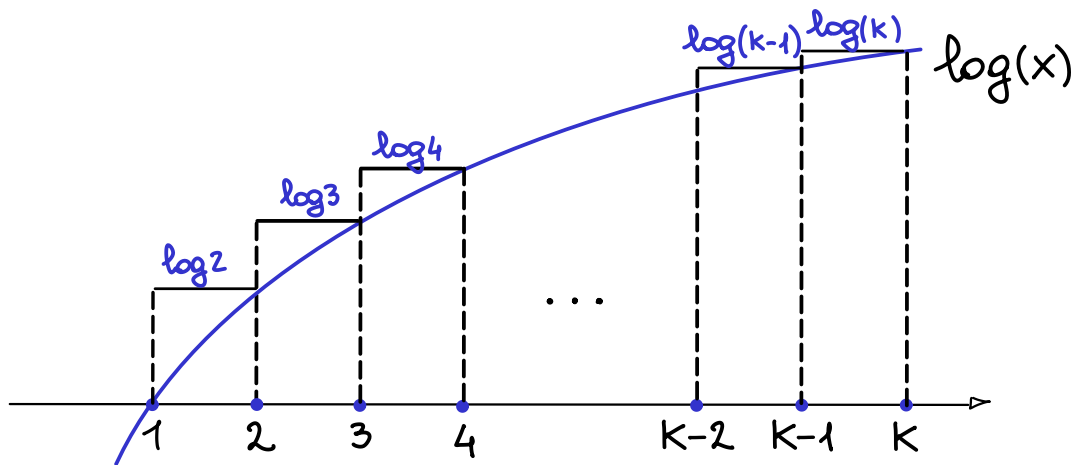
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k!)}{k^a} \text{ è convergente?}$$

Studiamo l'andamento asintotico di $\log(k!)$.

Stima dall'alto:

$$k! = \overbrace{k \cdot (k-1) \cdots 1}^{k \text{ fattori}} \leq \overbrace{k \cdot k \cdots k}^{k \text{ fattori}} = k^k \Rightarrow \log(k!) \leq k \log(k) \quad (A)$$

Stima dal basso: notiamo che



$$\log(k!) = \sum_{j=1}^k \log(j) \geq \int_1^k \log(x) dx = [x \log(x) - x]_1^k = k \log(k) - k + 1 \quad (B)$$

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k$

Così usando le stime (A) e (B) abbiamo che

$$1 - \left(\frac{k-1}{k \log(k)} \right) \xrightarrow{\text{(B)}} \frac{\log(k!)}{k \log(k)} \xrightarrow{\text{(A)}} 1 \Rightarrow \boxed{\log(k!) \sim k \log(k)}$$

Infine

$$0 \leq \frac{\log(k!)}{k^a} \sim \frac{k \log(k)}{k^a} = \frac{1}{k^{a-1} \log(k)^{-1}}$$

e per il confronto asintotico la serie data converge se e solo se $a-1 > 1$ ossia per $a > 2$.

OSSERVAZIONE

Con un metodo simile al confronto integrale dell'esempio precedente si dimostra l'approssimazione di STIRLING:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n \cdot e^{-n}$$

Si noti che tale approssimazione conferma la stima ottenuta

$$\begin{aligned} \log(n!) &\sim \frac{1}{2} \log(2\pi n) + n \log(n) - n \\ &\sim n \log(n). \end{aligned}$$