

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 28

ESEMPI

- $\sum_{k=0}^{\infty} (\log(2^k + 1) - k \log(2))$ converge? Sì

$$\log(2^k + 1) - k \log(2) = \log\left(1 + \frac{1}{2^k}\right) \sim \frac{1}{2^k}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ converge e per il confronto asintotico

anche la serie data converge.

- $\sum_{k=1}^{\infty} (\sin(\frac{1}{k}) - \arctg(\frac{1}{k}))$ converge? Sì

$$\sin(\frac{1}{k}) - \arctg(\frac{1}{k}) \sim \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{k^3} \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \text{ converge } \alpha=3>1$$

perché per $x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \sin(x) - \arctg(x) &= x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - \left(x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ &= \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

- Per quali $a > 0$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^a \log^2(e^k + 1)}{k^{2a} + k^4}$ è convergente?

$$O < \frac{k^a \log^2(e^k + 1)}{k^{2a} + k^4} \sim \begin{cases} \frac{k^{a+2}}{k^{2a}} = \frac{1}{k^{a-2}} & \text{se } a > 2 \\ \frac{1}{2} & \text{se } a = 2 \\ \frac{k^{a+2}}{k^4} = \frac{1}{k^{2-a}} & \text{se } 0 < a < 2 \end{cases}$$

$a-2 > 1$
convergenza

$2-a > 1$
convergenza

Così, per il confronto asintotico, la serie converge se $a \in (0, 1) \cup (3, +\infty)$.

TEOREMA (CRITERIO DELLA RADICE)

Sia $\{a_k\}$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che $a_k \geq 0$ definitivamente e $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = L \in [0, +\infty]$.

1) Se $L < 1$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente.

2) Se $L > 1$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$.

TEOREMA (CRITERIO DEL RAPPORTO)

Sia $\{a_k\}$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che $a_k > 0$ definitivamente e $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L \in [0, +\infty]$.

1) Se $L < 1$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente.

2) Se $L > 1$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$.

OSSERVAZIONE

Se il limite $L = 1$ allora i criteri della radice e del rapporto sono inconcludenti.

Infatti se $a_k = \frac{1}{k^\alpha}$ allora

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}} \right)^\alpha = 1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{k}{k+1} \right)^\alpha = 1$$

mentre

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

ESEMPI

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\alpha}}{k!}$ converge? Sì

Applichiamo il criterio del rapporto

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^{\alpha}}{\underbrace{(k+1)!}_{k+1}} \cdot \frac{\cancel{k!}}{k^{\alpha}} = \frac{1}{k+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\alpha} \rightarrow 0$$

$0 < 1$ e quindi la serie converge.

- $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k}\right)^{k^2}$ converge? Sì

Applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[k]{a_k} = \left(\frac{k-1}{k}\right)^{\frac{k^2}{k}} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \rightarrow e^{-1}$$

$e^{-1} < 1$ e quindi la serie converge.

- $\sum_{k=1}^{\infty} (k^3 + \log(k)) \sin\left(\frac{1}{3^k}\right)$ converge? Sì

Notiamo che per $k \rightarrow \infty$ $\sin(x) \sim x$ per $x \rightarrow 0$

$$0 < (k^3 + \log(k)) \cdot \sin\left(\frac{1}{3^k}\right) \sim \frac{k^3}{3^k}$$

$\uparrow k^3 \left(1 + \frac{\log(k)}{k^3}\right) \sim k^3$

Quindi per confronto asintotico basta studiare la convergenza della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3}{3^k}$.

Applichiamo il criterio della radice

$$\sqrt[k]{a_k} = \frac{(k^{\frac{1}{k}})^3}{3} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3} < 1$ e quindi la serie converge.

OSSERVAZIONE

Il caso in cui il termine della serie a_k cambi segno infinite volte è in generale più difficile da analizzare. Si dimostra che

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \text{ converge } \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge.}$$

ESEMPIO

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ è convergente $\forall x \in \mathbb{R}$.

Sia $a_k = \frac{x^k}{k!}$ allora per $k \rightarrow \infty$,

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{|x|^k} = \frac{|x|}{k+1} \rightarrow 0 < 1$$

così per il criterio del rapporto $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ converge e per (*) anche la serie data converge.

OSSERVAZIONE

Si dimostra che $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sin(x)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots = \cos(x)$$

TEOREMA (CRITERIO DI LEIBNIZ)

Sia $\{a_k\}$ una successione in $\mathbb{R}$.

Se $a_k \geq a_{k+1} \forall k \geq 0$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$ allora

la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$ è convergente.

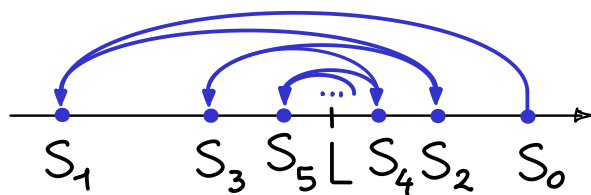
dim. Per la decrescenza e il limite a 0, $a_k \geq 0$.

Consideriamo la somma parziale $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$.
e dimostriamo che $S_n \rightarrow L \in \mathbb{R}$.

$$S_1 = S_0 - a_1$$

$$S_3 = S_2 - a_3$$

$$S_5 = S_4 - a_5$$



$$S_0 = a_0$$

$$S_2 = S_1 + a_2$$

$$S_4 = S_3 + a_4$$

Verifichiamo che S_{2m} decresce e S_{2m-1} cresce

$$S_{2m+2} = S_{2m} + \overset{\leq 0}{(-a_{2m+1} + a_{2m+2})} \leq S_{2m}$$

$$S_{2m+1} = S_{2m-1} + \overset{\geq 0}{(a_{2m} - a_{2m+1})} \geq S_{2m-1}$$

Inoltre $S_{2m}, S_{2m-1} \in [S_1, S_0]$ (limitatezza)

$$S_1 \leq S_{2m-1} = S_{2m} - \overset{\geq 0}{a_{2m}} \leq S_{2m} \leq S_0.$$

Quindi per la monotonia e la limitatezza i limiti esistono e sono finiti.

$$S_{2m} \rightarrow L_0 \text{ e } S_{2m-1} \rightarrow L_1$$

Infine

$$L_0 - L_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2m} - S_{2m-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2m} = 0 \Rightarrow L_0 = L_1 \overset{d}{=} L$$

Si conclude così che $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$.

$\{S_n\} = \{S_{2m}\} \cup \{S_{2m-1}\}$ □

OSSERVAZIONE

Il criterio di Leibniz vale anche se l'ipotesi di decrescenza è verificata definitivamente:

$$\exists N \geq 0: a_k \geq a_{k+1} \quad \forall k \geq N.$$

ESEMPIO

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ è convergente $\forall \alpha > 0$.

Si nota che per $\alpha > 0$, $\frac{1}{k^\alpha}$ è decrescente per $k \geq 1$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^\alpha} = 0.$$

Allora la serie converge per il criterio di Leibniz.