

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 27

SERIE NUMERICHE

Sia $\{a_k\}_{k \geq k_0}$ una successione in $\mathbb{R}$.

La SERIE NUMERICA associata è

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sum_{k=k_0}^n a_k}_{\text{SOMMA PARZIALE } S_n} = \begin{cases} L \in \mathbb{R} & \text{convergente} \\ +\infty \text{ o } -\infty & \text{divergente} \\ \nexists & \text{indeterminata} \end{cases}$$

somma della serie *comportamento della serie*

ESEMPI

$$\bullet \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} = 0.\overline{1} = \frac{1}{9} \quad \begin{aligned} 10 \cdot 0.\overline{1} &= 1.\overline{1} = 1 + 0.\overline{1} \\ (10-1)0.\overline{1} &= 1 \Rightarrow 0.\overline{1} = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

$$\bullet \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n (-1)^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \nexists$$

dove $S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n$

$$\bullet \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

dove

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Scomposizione in fratti semplici

SOMMA TELESOPICA

- $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ SERIE GEOMETRICA di ragione $x \in \mathbb{R}$

$$S_m = \sum_{k=0}^m x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^m \stackrel{\text{per induzione}}{=} \begin{cases} m+1 & \text{se } x=1 \\ \frac{1-x^{m+1}}{1-x} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

Quindi

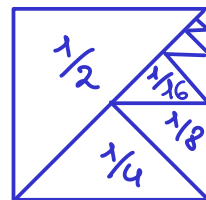
$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } |x| < 1 \\ +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \text{ } & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

perché per $x \neq 1$ $\lim_{m \rightarrow \infty} x^{m+1} = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \text{ } & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$

Si noti che se $|x| < 1$

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} x^k = \sum_{j=0}^{\infty} x^{j+k_0} = x^{k_0} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} x^j = \frac{x^{k_0}}{1-x}.$$

Ad esempio $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1$



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

OSSERVAZIONI

1) Se $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono due successioni in $\mathbb{R}$ tali che $a_k = b_k$ definitivamente allora le serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ hanno lo stesso comportamento (ma possiamo avere somme diverse).

2) Se $a_k \geq 0 \forall k \geq 0$ allora $S_m = \sum_{k=0}^m a_k$ è una succ. crescente e $\exists \lim_{m \rightarrow \infty} S_m = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.
convergente
divergente

La serie non può essere indeterminata.

TEOREMA (CONDIZIONE NECESSARIA DI CONVERGENZA)

Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è convergente allora $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

dim. Per ipotesi $S_m = \sum_{k=0}^m a_k \rightarrow L \in \mathbb{R}$ e per $m \geq 1$

$$S_m - S_{m-1} = \sum_{k=0}^m a_k - \sum_{k=0}^{m-1} a_k = a_m$$

Così

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} S_m - \lim_{m \rightarrow \infty} S_{m-1} = L - L = 0.$$

□

ESEMPI

- $\sum_{k=1}^{\infty} k \sin\left(\frac{1}{k}\right) = +\infty$

Non converge perché

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sin(1/k)}{1/k} = 1 \neq 0$$

La serie diverge a $+\infty$ perché $k \sin\left(\frac{1}{k}\right) > 0$.

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ SERIE ARMONICA

$a_k \rightarrow 0$ è condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza

Per verificare la divergenza si nota che

$$\begin{aligned} S_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^{m-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^m} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{2 \cdot \frac{1}{4}}_{\frac{1}{2}} + \underbrace{4 \cdot \frac{1}{8}}_{\frac{1}{2}} + \dots + \underbrace{2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m}}_{\frac{1}{2}} \\ &\geq 1 + \frac{m}{2} \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO)

Siano $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono due successioni in $\mathbb{R}$ tali che $0 \leq a_k \leq b_k$ definitivamente ($\forall k \geq N$)

1) Se $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge.

2) Se $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty$ allora $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = +\infty$.

ESEMPI

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ è convergente perché $\frac{1}{k(k-1)} \geq \frac{1}{k^2} \quad \forall k \geq 2$

$$\text{e} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + 1 = 2.$$

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k + \cos(k)} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$
(Note: $\cos(k) \leq 1$ is indicated with an arrow pointing to the denominator)

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

Siano $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ sono due successioni in $\mathbb{R}$ tali che $a_k \geq 0$ e $b_k > 0$ definitivamente ($\forall k \geq N$)

Se $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = L \in (0, +\infty)$ ossia $a_k \sim L b_k$ per $k \rightarrow \infty$
(Note: "EQUIVALENZA ASINTOTICA" is written below with an arrow pointing to the $\sim$ symbol)

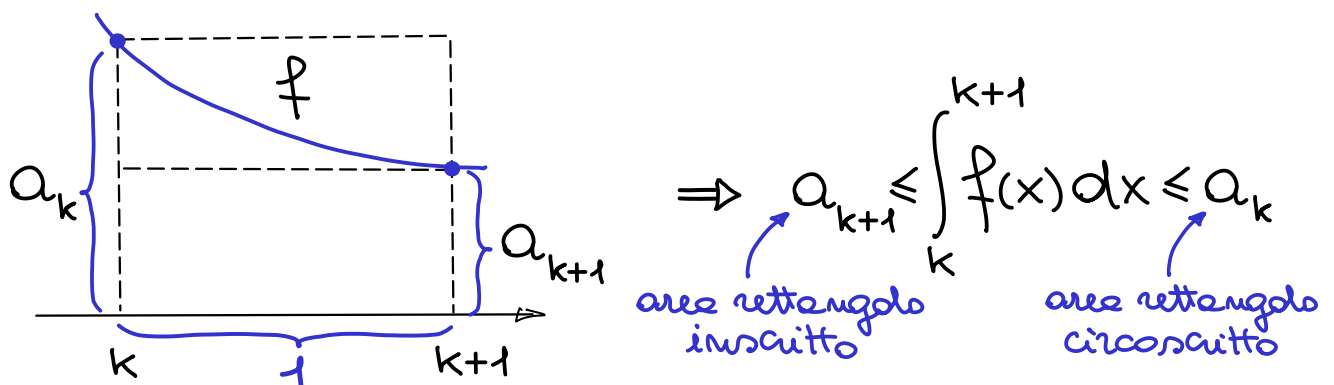
allora $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge $\Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ converge.

TEOREMA (CRITERIO DEL CONFRONTO INTEGRALE)

Sia f una funzione decrescente e ≥ 0 in $[1, +\infty)$ e sia $a_k = f(k) \forall k \geq 1$. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ converge} \iff \int_1^{+\infty} f(x) dx \text{ converge.}$$

dim. Confrontando le aree $\forall k \geq 1$ si ha che



Sia $b_k = \int_k^{k+1} f(x) dx$ allora $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \int_1^{+\infty} f(x) dx$ e

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} \leq \int_1^{+\infty} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Così per confronto si ottiene la tesi. $\square$

OSSERVAZIONE

Per il confronto integrale, dalle condizioni di convergenza degli integrali impropri si ha

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha} (\log(k))^{\beta}} \text{ converge} \iff$$

$$\begin{array}{l} \alpha > 1 \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \end{array}$$

ESEMPIO

- $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k - 100 \log(k)}{k(k + \sin(k))}$ converge? NO

$$\circ < \frac{3k - 100 \log(k)}{k(k + \sin(k))} = \frac{k(3 - \frac{100 \log(k)}{k})}{k^2(1 - \frac{\sin(k)}{k})} \sim \frac{3}{k}$$

definitivamente

dato che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$, per il confronto asintotico

anche la serie data diverge a $+\infty$.