

## ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 26

### ESEMPI

- Per quali  $a \in \mathbb{R}$  l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^a |x-1|^{4a}} dx \text{ è convergente?}$$

I punti da indagare per la convergenza sono:  $0^+$ ,  $1^\pm$  e  $+\infty$ .

Per  $x \rightarrow 0^+$

$$\frac{1-(e^{-x}) \sim 1-x}{x^a |x-1|^{4a}} \sim \frac{1-(1-x)}{x^a \cdot 1} = \frac{1}{x^{a-1}}$$

convergenza  
per  $a-1 < 1$   
ossia  $a < 2$

Per  $x \rightarrow 1^\pm$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a |x-1|^{4a}} \sim \frac{1-e^{-1}}{1 \cdot |x-1|^{4a}} = \frac{c}{|x-1|^{4a}}$$

convergenza  
per  $4a < 1$   
ossia  $a < \frac{1}{4}$

Per  $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a |x-1|^{4a}} \sim \frac{1}{x^a |x|^{4a}} = \frac{1}{x^{5a}}$$

convergenza  
per  $5a > 1$   
ossia  $a > \frac{1}{5}$

Quindi l'integrale in  $(0,1) \cup (1,+\infty)$  è convergente se e solo se

$$\begin{cases} a < 2 \\ a < \frac{1}{4} \\ a > \frac{1}{5} \end{cases} \iff \boxed{\frac{1}{5} < a < \frac{1}{4}}$$

- Per quali  $a > 0$  l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}|^a}{x^{1/3}} dx \text{ è convergente?}$$

L'unico punto da indagare è  $+\infty$ .

Notiamo che per  $t \rightarrow 0$

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \Rightarrow \sin(t) - t \sim -\frac{t^3}{6}.$$

Così per  $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{|\sin(\frac{1}{x}) - \frac{1}{x}|^a}{x^{1/3}} \sim \frac{\frac{1}{6^a} \cdot \frac{1}{x^{3a}}}{x^{1/3}} = \frac{C}{x^{3a + \frac{1}{3}}}$$

e l'integrale in  $[1, +\infty)$  è convergente se  $3a + \frac{1}{3} > 1$  ossia se  $a > \frac{2}{9}$ .

- Per quali  $a > 0$  l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(a-3)x}}{(1-e^{-x})(\log(2+\frac{1}{x}))^a} dx \text{ è convergente?}$$

I punti da indagare per la convergenza sono:  $0^+$  e  $+\infty$ .

Per  $x \rightarrow 0^+$ ,

$$\frac{e^{(a-3)x}}{(1-e^{-x})(\log(2+\frac{1}{x}))^a} \sim \frac{1}{x |\log(x)|^a}$$

$\nearrow \sim x$        $\nearrow \sim \log(\frac{1}{x}) = -\log(x) = |\log(x)|$

convergenza  
per  $a > 1$

Per  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\frac{e^{(a-3)x}}{(1-e^{-x})(\log(2+\frac{1}{x}))^a} \sim \frac{e^{(a-3)x}}{1 \cdot (\log(2))^a} \quad \begin{array}{l} \text{convergenza} \\ \text{per } a-3 < 0 \\ \text{ossia } a < 3 \end{array}$$

Quindi l'integrale in  $(0, +\infty)$  è convergente se e solo se

$$1 < a < 3$$

• Per quali  $a > 0$  l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x^a)^{\frac{1}{4}} - 1}{\log(e^{x^2} + x^3) \log^2(x+2)} dx \quad \text{è convergente?}$$

I punti da indagare per la convergenza sono:  $0^+$  e  $+\infty$ .

Per  $x \rightarrow 0^+$   $\sim 1 + \frac{1}{4}x^a$

$$\frac{(1+x^a)^{\frac{1}{4}} - 1}{\log(e^{x^2} + x^3) \log^2(x+2)} \sim \frac{\cancel{1} + \frac{1}{4}x^a - \cancel{1}}{x^2 \cdot \log^2(2)} = \frac{c}{x^{2-a}}$$

$$\uparrow \log(1+x^2+o(x^2)+x^3) \sim \log(1+x^2) \sim x^2$$

convergenza per  $2-a < 1$  ossia  $a > 1$ .

Per  $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{(1+x^a)^{\frac{1}{4}} - 1}{\log(e^{x^2} + x^3) \log^2(x+2)} \sim \frac{x^{\frac{a}{4}}}{x^2 \log^2(x)} = \frac{1}{x^{2-\frac{a}{4}} \log^2(x)}$$

$$\uparrow \sim \log(e^{x^2}) = x^2$$

convergenza per  $2 - \frac{a}{4} \geq 1$  ossia  $a \leq 4$ .

$$\uparrow p=2 > 1$$

Quindi l'integrale in  $(0, +\infty)$  è convergente se e solo se

$$1 < a \leq 4$$

### ESEMPI

- Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} dx$$

$$\begin{aligned} t = \sqrt{x}, t^2 = x \rightarrow 2t dt = dx \\ \sqrt{0} = 0, \sqrt{+\infty} = +\infty \end{aligned} \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{2t dt}{t(1+t^2)} = 2 \left[ \arctg(t) \right]_0^{+\infty} = 2 \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) = \pi.$$

- Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctg(x)}{x^2} dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \arctg(x) d\left(-\frac{1}{x}\right) = \left[ -\frac{\arctg(x)}{x} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} -\frac{1}{x} d(\arctg(x))$$

$$= 0 + \frac{\pi}{4} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[ \log(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2) \right]_1^{+\infty}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \left[ \log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \right]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{4} - \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{\log(2)}{2}$$

- Calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-2}^2 \frac{\log(x+2)}{\sqrt{2-x}} dx$$

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{2-x} \\ x &= 2-t^2 \\ 2t dt &= -dx \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \int_2^0 \frac{\log(4-t^2)}{t} (-2t dt)$$

$$= 2 \int_0^2 \log(4-t^2) dt$$

$(2-t)(2+t)$

$$= 2 \int_0^2 \log(2-t) dt + 2 \int_0^2 \log(2+t) dt$$

$s=2-t$        $s=2+t$

improprio      non improprio

$$= 2 \int_0^2 \log(s) ds + 2 \int_2^4 \log(s) ds$$

$$= 2 \int_0^4 \log(s) ds$$

$$= 2 \left[ x \log(x) - x \right]_{0^+}^4$$

$$= 2(4 \log(4) - 4) - 2 \overbrace{\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \log(x) - x)}^{=0}$$

$$= 16 \log(2) - 8.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{x^2} \int_2^{x^2} \frac{1}{\log(t)} dt$$

Notiamo che se  $F(x) = \int_2^x \frac{1}{\log(t)} dt$  allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \int_2^{+\infty} \frac{1}{\log(t)} dt = +\infty \quad \text{e} \quad F'(x) = \frac{1}{\log(x)}$$

$\alpha=0, \beta=1$

inoltre  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\log(x)} = +\infty$ .

Quindi per il limite dato possiamo applicare de l'Hôpital

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x^2)}{\frac{x^2}{\log(x)}} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F'(x^2) \cdot 2x}{\frac{2x \log(x) - x^2 \cdot 1/x}{\log^2(x)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{2x}}{\log(x^2)} \cdot \frac{\log^2(x)}{\cancel{x}(2\log(x) - 1)}$$

$\leftarrow 2\log(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(x)}{2\log(x) - 1} = \frac{1}{2}.$$