ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 25

OSSERVAZIONE

Se $f(x)\geq 0$ in $[a,b)$ allora la funzione integrale

$F(t)=\int_a^t f(x)dx$ è crescente in $[a,b)$ perché

$$a\leq t_1<t_2<b \Rightarrow F(t_2)-F(t_1)=\int_{t_1}^{t_2} \underbrace{f(x)}_{\geq 0}dx\geq 0$$

La crescenza di F implica l'esistenza del limite

$$\lim_{t\to b^-} F(t)=\int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}.$$

convergente divergente

l'int. improprio non può essere indeterminato

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DEL CONFRONTO PER GLI INT. IMPROPRI)

Siano f, g funzioni definite in $[a,b)$ con $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ tali che siano integrabili in $[a,t]$ $\forall t\in(a,b)$ e $\forall x\in[a,b)$ $0\leq f(x)\leq g(x)$.

1) Se $\int_a^b g(x)dx$ converge allora $\int_a^b f(x)dx$ converge.

2) Se $\int_a^b f(x)dx=+\infty$ allora $\int_a^b g(x)dx=+\infty$.

dim. Consideriamo le funzioni integrali:

$$F(t)=\int_a^t f(x)dx \quad e \quad G(t)=\int_a^t g(x)dx.$$

Allora per $a\leq t<b$

$$G(t)=\int_a^t g(x)dx \overset{g\geq f}{\geq} \int_a^t f(x)dx=F(t).$$

Quindi

esistono per l'osservazione precedente

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} G(t) \geq \lim_{t\to b^-} F(t) = \int_a^b f(x)\,dx$$

da cui seguono 1) e 2). $\square$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

- $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log(x))^\beta}\,dx = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha>1 \text{ e } \forall \beta\in\mathbb{R} \quad (1) \\ +\infty & \text{se } \alpha<1 \text{ e } \forall\beta\in\mathbb{R} \quad (2) \end{cases}$$

Se $\alpha>1$ allora per $x\to+\infty$

$$\frac{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}{x^\alpha(\log(x))^\beta} = \frac{x^{\overbrace{\frac{1-\alpha}{2}}^{<0}}}{(\log(x))^\beta} \longrightarrow 0$$

Per definizione di limite, per $\varepsilon=1$ $\exists\, r>2$ tale che

$$\forall x>r \quad \frac{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}{x^\alpha(\log(x))^\beta} \leq 1 \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{x^\alpha(\log(x))^\beta} \leq \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}.$$

Dato che $\frac{\alpha+1}{2}>1$, $\int_r^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}\,dx$ è convergente e per il teo. del confronto vale (1).

Se $\alpha<1$ allora per $x\to+\infty$

$$\frac{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}{x^\alpha(\log(x))^\beta} = \frac{x^{\overbrace{\frac{1-\alpha}{2}}^{>0}}}{(\log(x))^\beta} \longrightarrow +\infty$$

Per definizione di limite, per $M=1$ $\exists\, r>2$ tale che

$\forall x > r \quad \dfrac{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}{x^\alpha (\log(x))^\beta} \geq 1$ ossia $\dfrac{1}{x^\alpha(\log(x))^\beta} \geq \dfrac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}$.

Dato che $\frac{\alpha+1}{2} < 1$, $\displaystyle\int_r^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}\,dx = +\infty$ e per il teo. del confronto vale (2).

OSSERVAZIONE

Dai vari casi visti abbiamo che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log(x))^\beta}\,dx \text{ converge} \iff \boxed{\begin{array}{c}\alpha > 1 \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1\end{array}}$$

In modo simile si verifica che

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log(x)|^\beta}\,dx \text{ converge} \iff \boxed{\begin{array}{c}\alpha < 1 \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1\end{array}}$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

Siano f, g funzioni definite in $[a,b)$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tali che siano integrabili in $[a,t]$ $\forall t \in (a,b)$ e $\forall x \in [a,b)$ $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$.

Se $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, +\infty)$ ossia $f(x) \sim L g(x)$ per $x \to b^-$

EQUIVALENZA ASINTOTICA

allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ converge} \iff \int_a^b g(x)\,dx \text{ converge}.$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{3x^2+1}{4x^3+x+2}\right) dx$ è convergente? NO

  >0 e continua in $(0,+\infty)$

Per $x \to +\infty$,

$$\frac{3x^2+1}{4x^3+x+2} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^3}} \cdot \frac{3+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}} \sim \frac{3/4}{x}$$

$\alpha = 1$
int. in $[1,+\infty)$
è divergente

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^3+\sqrt{x}}\right) dx$ è convergente? SÍ

  >0 e continua in $(0,+\infty)$

I punti da indagare per la convergenza sono: 0^+ e $+\infty$.

Per $x \to 0^+$

$$\frac{1}{x^3+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$$

$\alpha = 1/2 < 1$
int. in $(0,1]$
è convergente

Per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x^3+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^3}$$

$\alpha = 3 > 1$
int. in $[1,+\infty)$
è convergente

Quindi l'integrale in $(0,+\infty)$ è convergente.

- Per quali $a>0$ l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}\log(x)}{(x^2-1)^a}\right) dx \text{ è convergente?}$$

>0 e continua in $(1,+\infty)$

I punti da indagare sono: 1^+ e $+\infty$.

Per $x \to 1^+$

$\log(1+(x-1)) \sim (x-1)$

$$\frac{\sqrt{x}\log(x)}{(x^2-1)^a} \sim \frac{1\cdot(x-1)}{2^a(x-1)^a} \sim \frac{c}{(x-1)^{a-1}}$$

$(x+1)(x-1)$

e l'int. in $(1,2]$ è convergente se $a-1<1$ ossia se $a<2$.

Per $x \to +\infty$

$$\frac{\sqrt{x}\log(x)}{(x^2-1)^a} \sim \frac{\sqrt{x}\log(x)}{x^{2a}} \sim \frac{1}{x^{2a-\frac{1}{2}}\log^{-1}(x)}$$

e l'int. in $[2,+\infty)$ è convergente se

$$2a-\frac{1}{2}>1 \quad \text{oppure} \quad 2a-\frac{1}{2}=1 \text{ e } \underbrace{-1>1}_{\text{impossibile}}$$

ossia se $a>\frac{3}{4}$.

Quindi l'integrale in $(1,+\infty)$ è convergente se e solo se valgono entrambe le condizioni

$$\boxed{\frac{3}{4}<a<2}$$

- Per quali $a\in\mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_{1/2}^{3/2}\left(\frac{e^x}{\sqrt{x}\,|\text{sen}(\pi x)|^a}\right)dx \text{ è convergente?}$$

>0 e continua in $[1/2,1)\cup(1,3/2]$

Il punto da indagare per la convergenza è: $1^\pm$. Per $x\to 1^\pm$,

$$\frac{e^x}{\sqrt{x}\,|\text{sen}(\pi x)|^a} \sim \frac{c}{|x-1|^a}$$

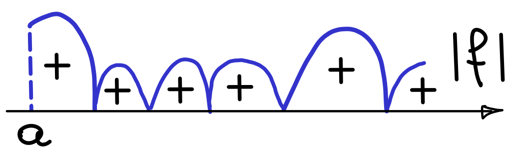
$\text{sen}(\pi x) = -\text{sen}(\pi(x-1)) \sim -\pi(x-1)$

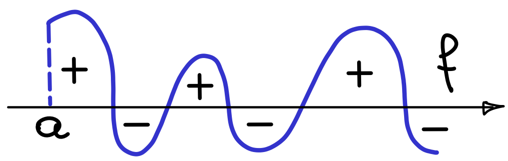
e gli integrali in $[1/2,1)$ e in $(1,3/2]$ sono convergenti se e solo se $a<1$.

OSSERVAZIONE

Il caso in cui la funzione da integrare cambi segno infinite volte nell'intervallo di integrazione è in generale più difficile da analizzare. Si dimostra che

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \text{ converge} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$





$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

- $$\int_\pi^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^a}\,dx = \int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,d(-\cos(x))$$

$$= \left[\frac{-\cos(x)}{x^a}\right]_\pi^{+\infty} - \int_\pi^{+\infty} (-\cos(x))\,d\left(\frac{1}{x^a}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi^a} - a\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{a+1}}\,dx \quad \text{è convergente } \forall a>0$$

Infatti:

$$\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\cos(x)}{x^{a+1}}\right| dx \underset{|\cos(x)|\leq 1}{\leq} \int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^{a+1}}\,dx$$

$a>0 \Rightarrow a+1>1$
convergente

e per (*) anche $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{a+1}}\,dx$ è convergente.