

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 22

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

L'algoritmo di integrazione di $\frac{P}{Q}$ dove P e Q sono polinomi è basato sulla DECOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI e prevede i seguenti passi:

- 1 Se il grado di P è $\geq$ al grado di Q si fa la divisione calcolando il quoziente S e il resto R :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

polinomio (pointing to $S(x)$)
funzione razionale con grado $R <$ grado Q (pointing to $\frac{R(x)}{Q(x)}$)

Se il grado di P è $<$ al grado di Q si pone $S=0$ e $R=P$.

- 2 Si fattorizza il polinomio Q in $\mathbb{R}[x]$

$$Q(x) = \prod_{k=1}^N \underbrace{(x - a_k)^{m_k}}_{\text{fattore di 1° grado}} \cdot \prod_{k=1}^M \underbrace{(x^2 + b_k x + c_k)^{m_k}}_{\text{fattore irriducibile di 2° grado}}$$

PRODUTTORIA (pointing to the first product)
polinomi a coeff. reali (pointing to the second product)
 $\Delta_k = b_k^2 - 4c_k < 0$

- 3 Si scrive $\frac{R}{Q}$ come combinazione lineare dei FRATTI SEMPLICI:

$$\frac{1}{(x - a_k)^j} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, m_k$$
$$\frac{x}{(x^2 + b_k x + c_k)^j} \quad \text{e} \quad \frac{1}{(x^2 + b_k x + c_k)^j} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, m_k$$

Il numero di fratti semplici è dato dal grado di Q .

Ad esempio

combinazione lineare dei FRATTI SEMPLICI

$$\frac{R(x)}{(x+1)^3(x+2)(x^2+1)^2} = \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2}{(x+1)^2} + \frac{C_3}{(x+1)^3} + \frac{C_4}{x+2} + \frac{C_5x+C_6}{x^2+1} + \frac{C_7x+C_8}{(x^2+1)^2}$$

dove $C_1, C_2, \dots, C_8$ sono costanti da determinare.

- 4] Si applica la linearità dell'integrale e si integrano il polinomio S ottenuto al passo 1 e i fratti semplici ottenuti al passo 3.

Per i fratti semplici relativi ai fattori di 1° grado:

$$\frac{1}{x-a} dx = \log|x-a| + c$$

Se $j \geq 2$ allora

$$\int \frac{1}{(x-a)^j} dx = \frac{(x-a)^{-j+1}}{-j+1} + c.$$

Per i fratti semplici relativi ai fattori di 2° grado:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c} dx = \int \frac{At+E}{t^2+D^2} dt \quad \begin{aligned} E &= -\frac{b}{2}A + B \\ D^2 &= -\frac{b^2}{4} + c = \frac{|\Delta|}{4} > 0 \end{aligned}$$

$x = t - \frac{b}{2}$
 $dx = dt$

senza il termine di 1° grado

$$= \frac{A}{2} \log(t^2 + D^2) + \frac{E}{D} \operatorname{arctg}\left(\frac{t}{D}\right) + c$$

$$= \frac{A}{2} \log(x^2 + bx + c) + \frac{2B - Ab}{\sqrt{|\Delta|}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{|\Delta|}}\right) + c.$$

Se $j \geq 2$ allora ci si può ricondurre ai seguenti due casi:

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^j} dx = \frac{1}{2} \int (x^2+1)^{-j} d(x^2+1) = \frac{(x^2+1)^{-j+1}}{2(-j+1)} + C$$

e

$$\int \frac{1 \pm x^2}{(x^2+1)^j} dx = \int \frac{1}{(x^2+1)^{j-1}} dx - \int x \cdot \left(\frac{x}{(x^2+1)^j} \right) dx.$$

coso di grado minore *da integrare per parti*

Ad esempio se $j=2$,

$$\begin{aligned} \int \frac{1 \pm x^2}{(x^2+1)^2} dx &= \int \frac{1}{x^2+1} dx - \int x \left(\frac{x}{(x^2+1)^2} \right) dx \\ &= \operatorname{arctg}(x) - \int x d\left(-\frac{1}{2(x^2+1)}\right) \\ &= \operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} + C. (*) \end{aligned}$$

Se $j=3$,

$$\int \frac{1 \pm x^2}{(x^2+1)^3} dx = \overbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx}^{(*)} - \int x \left(\frac{x}{(x^2+1)^3} \right) dx$$

$$\begin{aligned}
&= (*) - \int x d\left(-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right) \quad \text{= (*)} \\
&= (*) + \frac{x}{4(x^2+1)^2} - \frac{1}{4} \int \frac{1}{(x^2+1)^2} dx \\
&= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \arctg(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} + c \right) + \frac{x}{4(x^2+1)^2} \\
&= \frac{3}{8} \arctg(x) + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{x}{4(x^2+1)^2} + c.
\end{aligned}$$

ESEMPI

$$\bullet \int \frac{x^3+11}{x^2-5x+6} dx$$

Per il passo 1 è necessario dividere

$$\begin{array}{r|l}
x^3 & x^2-5x+6 \\
x^3-5x^2+6x & x+5 \\
\hline
+5x^2-6x & \\
+5x^2-25x+30 & \\
\hline
19x-19 &
\end{array}$$

E quindi

$$\frac{x^3+11}{x^2-5x+6} = x+5 + 19 \frac{x-1}{x^2-5x+6} \quad \text{passo 2} \quad \leftarrow (x-2)(x-3)$$

$$= x+5 + 19 \left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} \right) \quad \text{passo 3}$$

Determiniamo A e B

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x - (3A+2B)}{x^2-5x+6} = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

da cui

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=1-A \\ 3A+2(1-A)=1 \end{cases} \quad \begin{cases} B=2 \\ A=-1 \end{cases}$$

Così per linearità

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3+11}{x^2-5x+6} dx &= \int (x+5) dx - 19 \int \frac{dx}{x-2} + 38 \int \frac{dx}{x-3} \\ &= \frac{x^2}{2} + 5x - 19 \log|x-2| + 38 \log|x-3| + C. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE

Nell'esempio precedente, A e B si possono ottenere anche sfruttando in modo diverso l'identità: $\forall x \neq 2, 3$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Allora

$$\begin{aligned} A &= \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \frac{2-1}{2-3} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) f(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = \frac{3-1}{3-2} = 2. \end{aligned}$$

$$\bullet \int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} \right) dx$$

Partendo dall'identità: $\forall x \neq \pm 1$

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

A, B, C si possono trovare sia risolvendo il sistema

$$\underbrace{A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 = x^2}_{(A+C)x^2 + (B-2C)x + (-A+B+C)} \iff \begin{cases} A+C=1 & x^2 \\ B-2C=0 & x^1 \\ -A+B+C=0 & x^0 \end{cases}$$

che calcolando i seguenti limiti

$$B = \lim_{x \rightarrow 1} (x-1)^2 f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$C = \lim_{x \rightarrow -1} (x+1) f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}$$

e infine per trovare A valutiamo $f(x)$ per un qualunque $x \neq \pm 1$. Ad esempio per $x=0$,

$$0 = f(0) = -A + B + C = -A + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{3}{4}.$$

Così per linearità

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} dx = \frac{3}{4} \log|x-1| - \frac{1/2}{x-1} + \frac{1}{4} \log|x+1| + c.$$