ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 20

PRIMITIVE

Una funzione F si dice una PRIMITIVA di f in $A \subseteq \mathbb{R}$ se F è derivabile in A e

$$\forall x \in A \quad F'(x) = f(x).$$

ESEMPI

- $\frac{x^3}{3}$, $\frac{x^3}{3}+4$, $\frac{x^3}{3}-2$ sono primitive di x^2 in $\mathbb{R}$
- $F(x) = \log|x-1| + \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } x>1 \\ 3 & \text{se } x<1 \end{cases}$ è una primitiva

di $f(x) = \frac{1}{x-1}$ in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Infatti se $x>1$ allora

$$F'(x) = \left(\log(x-1) - \frac{1}{2}\right)' = \frac{1}{x-1}$$

mentre se $x<1$ allora

$$F'(x) = \left(\log(-x+1) + 3\right)' = \frac{1}{-x+1} \cdot (-1) = \frac{1}{x-1}.$$

OSSERVAZIONE

Se F è una primitiva di f allora

$$\forall c \in \mathbb{R} \qquad (F(x)+c)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

e quindi anche F+c è una primitiva di f. Anzi TUTTE le primitive di f hanno questa forma: se G è un'altra primitiva di f allora

$$(F(x)-G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

e quindi $F(x)-G(x)$ è identicamente costante su ogni intervallo.

PRIMITIVE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

f	F
x^b $\quad b\neq -1$	$\frac{x^{b+1}}{b+1}$
$\frac{1}{x+a}$	$\log\lvert x+a\rvert$
e^x	e^x
$\operatorname{sen}(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\operatorname{sen}(x)$

f	F
$\frac{1}{x^2+a^2}$ $\quad a\neq 0$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right)$ $-\arccos\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right)$

Le corrispondenze nella tabella si verificano direttamente con la definizione.
Ad esempio:

$$\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{x^2+a^2}$$

oppure

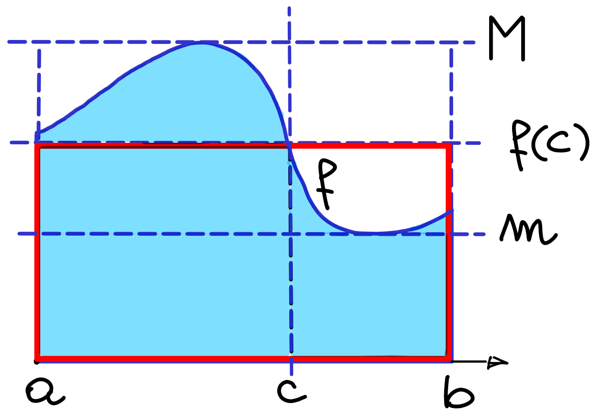
$$\left(\arcsin\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\lvert a\rvert} = \frac{\cancel{\sqrt{a^2}}}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\lvert a\rvert}}.$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DELLA MEDIA INTEGRALE)

Se f è continua in $[a,b]$ allora $\exists c \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

media integrale di f in $[a,b]$



dim. Sia σ la suddivisione data dai soli due punti $x_0 = a < b = x_1$. Allora

$$m(b-a) = s(f,\sigma) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(f,\sigma) = M(b-a)$$

ossia

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

dove m e M sono rispettivamente il valore minimo e massimo di f in $[a,b]$. Tali valori esistono per il teorema di Weierstrass.

Dato che per il teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori in $[m,M]$, allora

$$\exists c \in [a,b] : \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

$\square$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

Sia f una funzione continua in $[a,b]$ e sia I la FUNZIONE INTEGRALE

$$I(x)=\int_a^x f(t)\,dt.$$

Allora

1) I è derivabile in $[a,b]$ e $I'(x)=f(x)$ ossia I è una primitiva di f.

2) Se F è una qualunque primitiva di f allora

$$\int_a^b f(x)\,dx=\big[F(x)\big]_a^b=F(b)-F(a).$$

dim.

1) Sia $x\in[a,b]$ e sia $h\neq 0$ tale che $x+h\in[a,b]$. Allora il rapporto incrementale di I è

$$\frac{I(x+h)-I(x)}{h}=\frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt\right)$$

$$=\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c(h))$$

per il teorema della media integrale $\exists\, c(h)\in[x,x+h]$

Se $h\to 0$, per doppio confronto, $c(h)\to x$, e per la continuità di f in x,

$$f(c(h))\to f(x).$$

Quindi il limite rapporto incrementale di I esiste ed è uguale a $f(x)$:

$$I'(x)=f(x).$$

2) Se F è una primitiva di f allora $\exists c\in\mathbb{R}$ tale che $F(x)=I(x)+c$ e

$$F(b)-F(a)=I(b)+\cancel{c}-\underbrace{I(a)}_{=0}-\cancel{c}=\int_a^b f(x)\,dx. \quad \square$$

OSSERVAZIONE

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che il problema del calcolo dell' INTEGRALE DEFINITO

con gli estremi di integrazione

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

è ridotto alla ricerca di F, una primitiva di f, e al calcolo della variazione di F agli estremi $F(b)-F(a)$.

Per la ricerca di F introduciamo la notazione di INTEGRALE INDEFINITO

senza gli estremi di integrazione

$$\int f(x)\,dx=\overbrace{F(x)+c}^{\text{TUTTE le primitive}}.$$

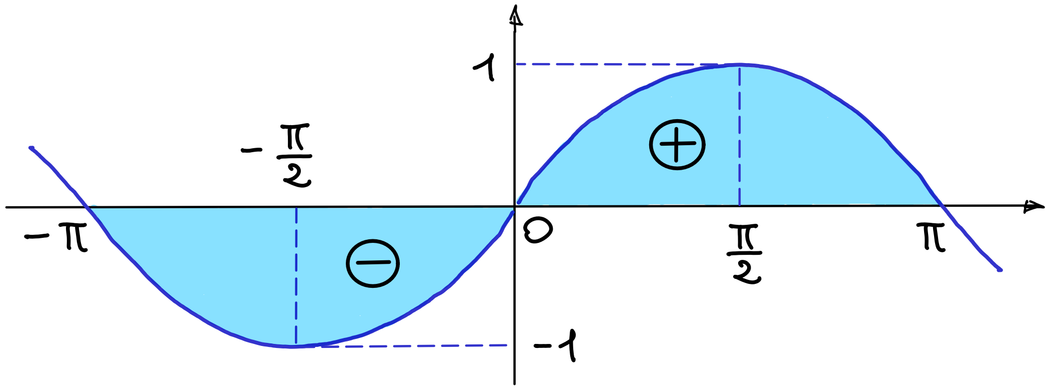
costante arbitraria

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\int \operatorname{sen}(x)dx = -\cos(x) + c$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1 + 1 = 2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(x)dx = \Big[-\cos(x)\Big]_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) = -1 + 1 = 0.$$



- $\int e^{-x}dx = -e^{-x} + c$ perché $(-e^{-x})' = e^{-x}$

$$\int_0^{b} e^{-x}dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^{b} = -e^{-b} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-b}.$$

Osserviamo che $\lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} e^{-x}dx = 1.$