ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 19

CALCOLO INTEGRALE

All'origine del calcolo integrale c'è il METODO DI ESAUSTIONE-COMPRESSIONE per il calcolo dell'area del cerchio usato da ARCHIMEDE.
L'idea è di calcolare tale area usando delle figure geometriche le cui aree sono semplici da calcolare ossia poligoni regolari (unioni di triangoli).
Dato un cerchio si inscrivono (esaustione) e si circoscrivono (compressione) dei poligoni regolari di N lati. Allora $\forall N \geq 3$,

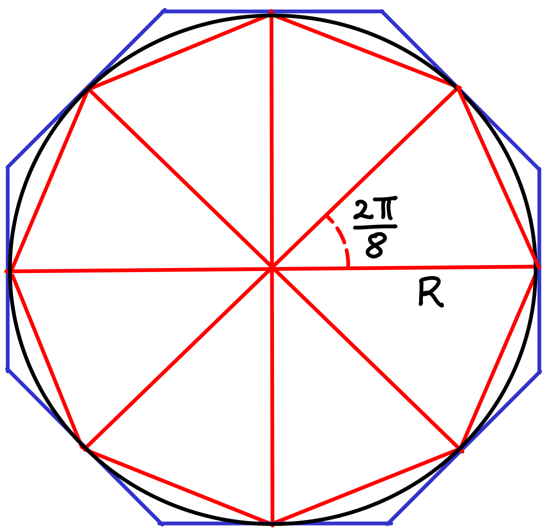
area del poligono inscritto di N lati → $s_N \leq A \leq S_N$ ← area del poligono circoscritto di N lati

↑ area del cerchio

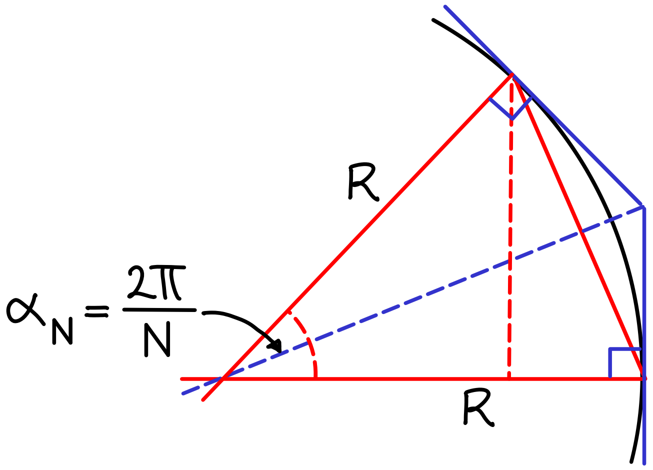
e in senso moderno definiamo l'area del cerchio A come

$$\lim_{N\to\infty} s_N = A = \lim_{N\to\infty} S_N$$

N = 8



Infatti:



per $N \to \infty$,

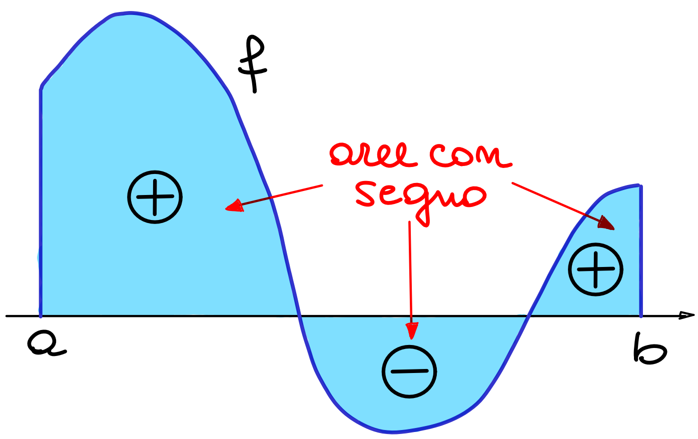
$$s_N = N \cdot \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \operatorname{sen}(\alpha_N) = \pi R^2 \underbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{N}\right)}{\frac{2\pi}{N}} \right)}_{\to 1} \longrightarrow \pi R^2$$

$$S_N = N\, 2 \cdot \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_N}{2}\right) = \pi R^2 \underbrace{\left(\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{N}\right)}{\frac{\pi}{N}} \right)}_{\to 1} \longrightarrow \pi R^2$$

e quindi per doppio confronto $A = \pi R^2$.

Adattiamo il metodo del calcolo dell'area del cerchio al seguente insieme

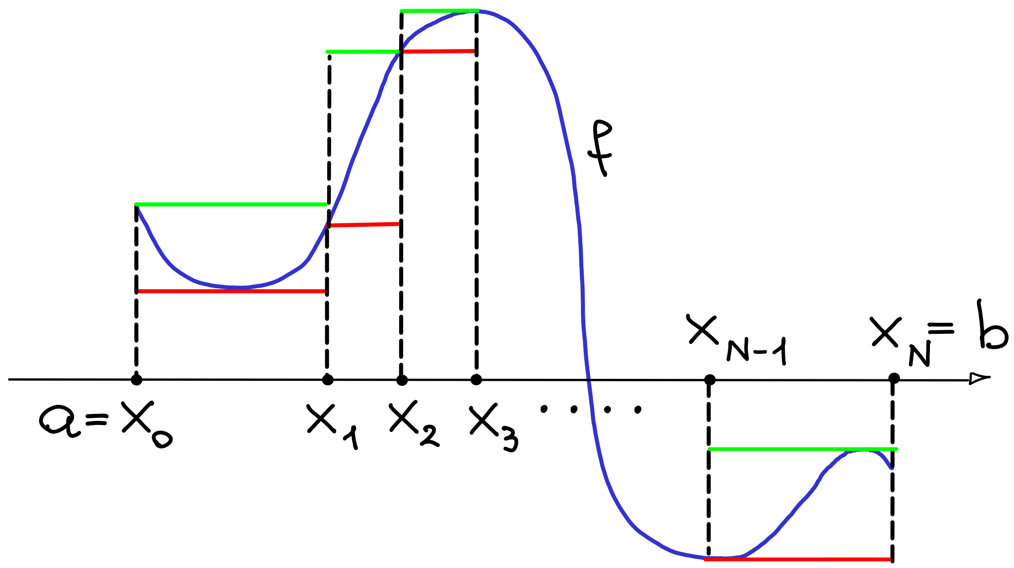
$$T = \left\{ (x,y) : x \in [a,b],\ y \in \begin{cases} [0, f(x)] & \text{se } f(x) \geq 0 \\ [f(x), 0] & \text{se } f(x) \leq 0 \end{cases} \right\}$$



dove $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una funzione limitata.

Per $N \geq 1$ sia σ una SUDDIVISIONE di $[a,b]$ data dai punti:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b.$$



La SOMMA INFERIORE di f rispetto a σ è

$$s(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{N} m_k (x_k - x_{k-1})$$

somma delle aree con segno dei rettangoli inscritti

dove $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$.

La SOMMA SUPERIORE di f rispetto a σ è

$$S(f,\sigma) = \sum_{k=1}^{N} M_k (x_k - x_{k-1})$$

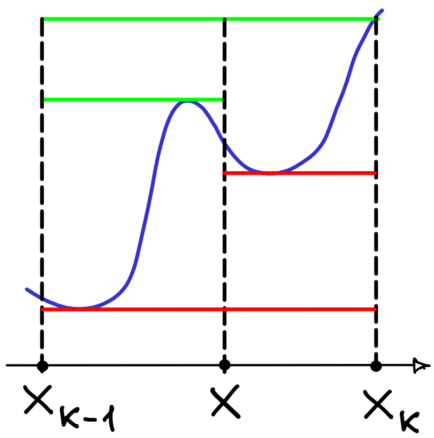
somma delle aree con segno dei rettangoli circoscritti

dove $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$.

Allora per costruzione, per ogni suddivisione σ

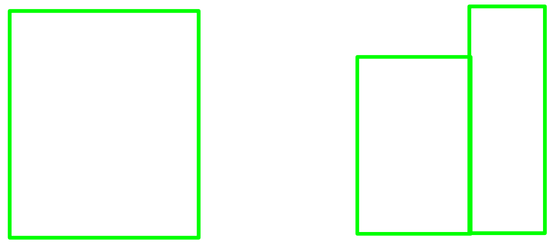
$$s(f,\sigma) \leq S(f,\sigma).$$

Aggiungendo un punto x ad una suddivisione σ si ha che



$$s(f,\sigma) \leq s(f,\sigma\cup\{x\})$$

$$S(f,\sigma) \geq S(f,\sigma\cup\{x\})$$



Così $\forall\, \sigma_1, \sigma_2$ suddivisioni di $[a,b]$

$$s(f,\sigma_1) \leq s(f,\sigma_1\cup\sigma_2) \leq S(f,\sigma_1\cup\sigma_2) \leq S(f,\sigma_2)$$

e quindi

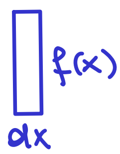
$$\sup\{s(f,\sigma_1) : \sigma_1 \text{ sudd. di } [a,b]\} \leq \inf\{S(f,\sigma_2) : \sigma_2 \text{ sudd. di } [a,b]\}.$$

f si dice INTEGRABILE in $[a,b]$ secondo RIEMANN-DARBOUX se vale l'uguale

$$\sup\{s(f,\sigma_1) : \sigma_1 \text{ sudd. di } [a,b]\} = \inf\{S(f,\sigma_2) : \sigma_2 \text{ sudd. di } [a,b]\}.$$

e il valore comune definisce

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Somma 

che indica l'INTEGRALE DI f DA a A b.

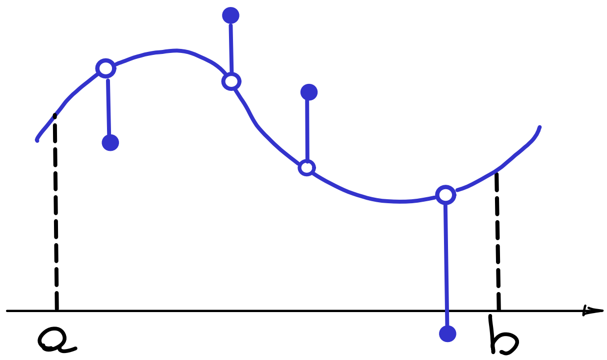
a e b sono gli estremi di integrazione.

TEOREMA

Se f è continua in $[a,b]$ allora f è integrabile in $[a,b]$.

OSSERVAZIONI

1) Se f è integrabile in $[a,b]$ allora rimane integrabile se f viene modificata in un numero finito di punti e il suo integrale da a e b è lo stesso.



2) Se f è integrabile in $[a,b]$ allora per convenzione si pone

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx \,, \qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

3) Additività rispetto all'intervallo di integrazione: se f è integrabile in $[a,b]$ allora per ogni $c \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

4) Linearità: se f e g sono integrabili in $[a,b]$ allora $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

5) Monotonia: se f e g sono integrabili in $[a,b]$ e $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \leq g(x)$ allora

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Inoltre dato che $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, si ha che

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

ossia

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

6) Se f è continua in $[a,b]$ allora

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{N\to\infty} \frac{b-a}{N} \sum_{k=1}^{N} f(\overbrace{a + k\frac{b-a}{N}}^{x_k})$$

suddivisione uniforme $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{N}$

Ad esempio, se $f(x) = x^2$ e $[a,b] = [0,1]$ allora

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{k}{N}\right)^2 = \lim_{N\to\infty} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6N^3} = \frac{1}{3}.$$

$$\sum_{k=1}^{N} k^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$ si verifica per induzione