ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 16

ESEMPI

- $f(x)=\operatorname{sen}(x)$, $x_0=0$, T_n?

Calcolo delle derivate successive:

$$
\begin{tikzcd}
\operatorname{sen}(x) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "x=0"] & \cos(x) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "x=0"] & -\operatorname{sen}(x) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "x=0"] & -\cos(x) \arrow[lll, bend right, "D"'] \arrow[d, "x=0"] \\
0 & 1 & 0 & -1
\end{tikzcd}
$$

Così il polinomio di Taylor T_{2m+1} in $x_0=0$ è

$$T_{2m+1}(x)=0+1\cdot x+0\cdot\frac{x^2}{2!}-1\cdot\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

- $f(x)=\cos(x)$, $x_0=0$, T_n?

Calcolo delle derivate successive:

$$
\begin{tikzcd}
\cos(x) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "x=0"] & -\operatorname{sen}(x) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "x=0"] & -\cos(x) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "x=0"] & \operatorname{sen}(x) \arrow[lll, bend right, "D"'] \arrow[d, "x=0"] \\
1 & 0 & -1 & 0
\end{tikzcd}
$$

Così il polinomio di Taylor T_{2m} in $x_0=0$ è

$$T_{2m}(x)=1+0\cdot x-1\frac{x^2}{2!}+0\cdot\frac{x^3}{3!}+\dots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

- $f(x)=(1+x)^b,\ x_0=0,\ T_n?$

Calcolo delle derivate successive:

$$\begin{array}{ccccc}
(1+x)^b & \xrightarrow{D} & b(1+x)^{b-1} & \xrightarrow{D} & b(b-1)(1+x)^{b-2} \\
\downarrow x=0 & & \downarrow x=0 & & \downarrow x=0 \\
1 & & b & & b(b-1)
\end{array}$$

$$\xrightarrow{D}\cdots\xrightarrow{D} b(b-1)\cdots(b-n+1)(1+x)^{b-n}$$
$$\downarrow x=0$$
$$b(b-1)\cdots(b-n+1)$$

Così il polinomio di Taylor T_n in $x_0=0$ è

$$T_n(x)=1+bx+\frac{b(b-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{b(b-1)\cdots(b-n+1)}{n!}x^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{b}{k}x^k \quad \text{dove } \binom{b}{k}=\frac{b(b-1)\cdots(b-k+1)}{k!}$$

COEFFICIENTE BINOMIALE GENERALIZZATO con $b\in\mathbb{R}$

Ad esempio:

1) il polinomio di Taylor T_5 di $f(x)=\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$ in $x_0=0$ è

$$T_5(x)=\sum_{k=0}^{5}\binom{-1}{k}x^k=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5$$

2) il polinomio di Taylor T_3 di $f(x)=\sqrt{1+x}=(1+x)^{1/2}$ in $x_0=0$ è

$$T_3(x)=\sum_{k=0}^{3}\binom{1/2}{k}x^k=1+\frac{1}{2}x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3$$

$$=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3.$$

- $f(x)=\operatorname{tg}(x)$, $x_0=0$, T_3 ?

Calcolo delle derivate:

$$\underset{\substack{\downarrow x=0\\ 0}}{\operatorname{tg}(x)} \xrightarrow{D} \underset{\substack{\downarrow x=0\\ 1}}{1+\operatorname{tg}^2(x)} \xrightarrow{D} 2\operatorname{tg}(x)(1+\operatorname{tg}^2(x)) = \underset{\substack{\downarrow x=0\\ 0}}{2\operatorname{tg}(x)+2\operatorname{tg}^3(x)}$$

$$\xrightarrow{D} \underset{\substack{\downarrow x=0\\ 2}}{2(1+\operatorname{tg}^2(x))+6\operatorname{tg}^2(x)(1+\operatorname{tg}^2(x))}$$

Così $T_3(x)=0+1\cdot x+0\cdot x^2+\frac{2}{3!}x^3=x+\frac{x^3}{3}$.

- $f(x)=\operatorname{arctg}(x)$, $x_0=0$, T_3 ?

Calcolo delle derivate:

$$\underset{\substack{\downarrow x=0\\ 0}}{\operatorname{arctg}(x)} \xrightarrow{D} \underset{\substack{\downarrow x=0\\ 1}}{(1+x^2)^{-1}} \xrightarrow{D} \underset{\substack{\downarrow x=0\\ 0}}{-(1+x^2)^{-2}\cdot 2x} \xrightarrow{D} \underset{\substack{\downarrow x=0\\ -2}}{-2(1+x^2)^{-2}+2x\cdot(\cdots)}$$

Così $T_3(x)=0+1\cdot x+0\cdot x^2-\frac{2}{3!}x^3=x-\frac{x^3}{3}$.

$\boxed{\text{O-PICCOLO}}$ (simbolo di LANDAU)

Se $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ diciamo che f è un O-PICCOLO di g per $x\to x_0$ e si scrive $f\in o(g)$ se $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$ ossia se f è un infinitesimo di ordine superiore a g.

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (FORMULA DI TAYLOR CON RESTO DI PEANO)

Se f è derivabile n volte in $I(x_0, r)$ con $r>0$ allora

$$\forall x \in I(x_0, r) \qquad f(x) = T_{n,x_0}(x) + o((x-x_0)^n).$$

dim. Dobbiamo dimostrare che per $h = x - x_0 \to 0$

$$\frac{f(x) - T_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} = \frac{f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot h^k}{h^n}$$

$$= \frac{f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot h^k}{h^n} - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \xrightarrow{?} 0$$

Applicando $n-1$ volte de l'Hôpital si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot h^k}{h^n}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h) - \sum_{k=\cancel{0}1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot k h^{k-1}}{n h^{n-1}}$$

$$\overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f''(x_0+h) - \sum_{k=2}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot k(k-1) h^{k-2}}{n(n-1) h^{n-2}}$$

$$\overset{H}{=} \dots \overset{H}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0+h) - f^{(n-1)}(x_0)}{n!\, h} \overset{\text{definizione di derivata}}{=} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

da cui segue la tesi. $\square$

OSSERVAZIONE Si dimostra che $T_{n,x_0}(x)$ è l'unico polinomio P di grado $\leq n$ tale che

$$f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n)$$

Principali SVILUPPI DI TAYLOR: per $x \to 0$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^b = 1 + bx + \frac{b(b-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{b(b-1)\cdots(b-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(xe^x - \log(1+x))^2}{\operatorname{sen}(x^2 - x^4) - x^2} = ?$

Ricordando che per $x \to 0$

$e^x = 1 + x + o(x)$, $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $\operatorname{sen}(x) = x + o(x^2)$

abbiamo che

$$\frac{(xe^x - \log(1+x))^2}{\operatorname{sen}(x^2 - x^4) - x^2} = \frac{(x(1+x+o(x)) - (x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)))^2}{x^2 - x^4 + o((x^2-x^4)^2) - x^2}$$

$$= \frac{\left(\cancel{x} + x^2 + o(x^2) - \cancel{x} + \frac{x^2}{2} - o(x^2)\right)^2}{\cancel{x^2} - x^4 + o(x^4) - \cancel{x^2}}$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)^2}{-x^4 + o(x^4)} = \frac{\frac{9}{4}x^4 + \overbrace{3x^2 o(x^2) + o(x^4)}^{=o(x^4)}}{-x^4 + o(x^4)}$$

$$= \frac{\cancel{x^4}\left(\frac{9}{4} + o(1)\right)}{\cancel{x^4}(-1 + o(1))} \longrightarrow -\frac{9}{4}$$

- $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(tg(x))^2} \right) = \,?$

Per $x \to 0$, $(tg(x))^2 = \left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 = x^2 + \frac{2x^4}{3} + o(x^4)$.

$= x^2 + o(x^2)$

Così

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(tg(x))^2} = \frac{(tg(x))^2 - x^2}{x^2 (tg(x))^2} = \frac{\cancel{x^2} + \frac{2x^4}{3} + o(x^4) - \cancel{x^2}}{x^2(x^2 + o(x^2))}$$

$$= \frac{\frac{2x^4}{3} + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)}$$

$$= \frac{\cancel{x^4}\left(\frac{2}{3} + o(1)\right)}{\cancel{x^4}(1 + o(1))} \longrightarrow \frac{2}{3}$$