ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 15

TEOREMA (DI CAUCHY)

Siano f e g funzioni continue in $[a,b]$ e derivabili in . Se $\forall x \in (a,b)$ $g'(x) \neq 0$ allora

$\exists c \in (a,b)$ tale che $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

OSSERVAZIONE Se $g(x)=x$ il Teorema di Cauchy coincide con il teorema di Lagrange.

TEOREMA (DI DE L'HÔPITAL-JOHANN BERNOULLI)

Siano f e g funzioni derivabili in (x_0, x_0+r) con $r>0$ tali che:

1) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = 0$ oppure

   $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = \pm\infty$;

2) $\forall x \in (x_0, x_0+r)$ $g'(x) \neq 0$;

3) $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora $\exists \lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

dim. Caso $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} g(x) = 0$.

Si estendono le funzioni f e g ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Così le funzioni estese f e g sono continue in $[x_0, x_0+r)$.

Sia $\{x_n\}_n$ una successione in (x_0, x_0+r) tale che $x_n \to x_0^+$. Allora $\forall n \in \mathbb{N}^+$ per il teorema di Cauchy applicato in $[x_0, x_n]$ $\exists\, c_n \in (x_0, x_n)$ tale che

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - \overset{=0}{f(x_0)}}{g(x_n) - \underset{=0}{g(x_0)}} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}$$

Siccome $x_0 < c_n < x_n$, per doppio confronto, $c_n \to x_0^+$ e

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} \xrightarrow{3)} L.$$

Infine, per il teorema ponte,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

$\square$

OSSERVAZIONE

Il teorema vale anche sostituendo x_0^+ con x_0^- oppure con $\pm\infty$.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x\log(a)} - 1}{x} \overset{H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^{x\log(a)}\log(a)}{1} = \log(a)$$

- $$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} \overset{H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 0 - 1}{2x} = \frac{1}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)-x}{x^3} \overset{H}{\underset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{3\cdot x^2} = \dfrac{1}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{6}$

- $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\log(x)-x+1}{1-\cos(x-1)} \overset{H}{\underset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\left(\frac{1}{x}-1\right)^{=-\frac{x-1}{x}}}{\operatorname{sen}(x-1)} = -1$

$$\overset{H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\cos(x-1)} = -1$$

- $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{4\sqrt{x}-x-4} \overset{H}{\underset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2\operatorname{sen}(\pi x)\cdot\cos(\pi x)\cdot\pi}{2x^{-1/2}-1}$

$$\overset{H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to 4} \frac{2\pi^2(\cos^2(\pi x)-\operatorname{sen}^2(\pi x))}{-x^{-3/2}} = -16\pi^2$$

alternativa: per $x\to 4$

$$\frac{\operatorname{sen}^2(\pi x)}{4\sqrt{x}-x-4} = -\left(\frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\sqrt{x}-2}\right)^2 \to -(4\pi)^2 = -16\pi^2$$

dove $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\sqrt{x}-2} \overset{H}{\underset{0/0}{=}} \lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\cos(\pi x)\cdot\pi}{\frac{1}{2}x^{-1/2}} = 4\pi$

- $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(2\operatorname{arctg}(x)-\pi e^{1/x}\right) = +\infty\cdot 0$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2\operatorname{arctg}(x)-\pi e^{1/x}}{1/x}$$

$$\overset{H}{\underset{0/0}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}-\pi e^{1/x}\cdot(-x^{-2})}{-x^{-2}}$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \left(-\frac{2x^2}{1+x^2}-\pi e^{1/x}\right) = -2-\pi$$

OSSERVAZIONE

Prima di applicare il teorema di de L'Hôpital è necessario verificare che le ipotesi siano soddisfatte:

- $$+\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{x} \underset{\frac{1}{0^+}}{\overset{H}{\neq}} \lim_{x\to 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{1} = 0$$

- $$\frac{3}{2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x+\operatorname{sen}(x)}{2x+\cos(x)} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{H}{\neq}} \lim_{x\to +\infty} \frac{3+\cos(x)}{2-\operatorname{sen}(x)}$$ Non esiste!

$$\frac{3+\cos(2\pi n)}{2-\operatorname{sen}(2\pi n)} = 2 \rightarrow 2 \neq 3 \leftarrow 3 = \frac{3+\cos(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}{2-\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}+2\pi n)}$$

OSSERVAZIONE

Prima di introdurre formalmente le nozioni di polinomio di Taylor e del simbolo $o(x^n)$ detto "o-piccolo" di x^n, facciamo qualche considerazione preliminare.

- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1 \iff \frac{e^x-1}{x} = 1 + \underbrace{o(1)}_{\text{infinitesimo per } x\to 0}$$

$$\iff e^x - 1 = x(1+o(1)) \iff e^x = 1 + x + \underbrace{x\cdot o(1)}_{\substack{\text{infinitesimo} \\ \text{di ordine superiore a } x}} = o(x)$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{2x} = \frac{1}{2}$$

$$\iff \frac{e^x-1-x}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1) \iff e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \underbrace{x^2 \cdot o(1)}_{=o(x^2)}$$

• $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{3x^2} = \frac{1}{6}$

$\Longleftrightarrow \; e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ $\qquad o(x\ )$

In generale, per ogni intero $n \geq 0$,

$$e^x = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}}_{\text{polinomio}} + \underbrace{o(x^n)}_{\text{infinitesimo di ordine superiore a } n}$$

POLINOMIO DI TAYLOR

Sia f una funzione derivabile n volte in x_0.
Il POLINOMIO DI TAYLOR di f di ordine n e centro x_0 è

$$T_{n,x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

← DERIVATA K-SIMA

ESEMPI

• $f(x) = e^x$, $x_0 \in \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $f^{(k)}(x_0) = e^{x_0}$

Così il polinomio di Taylor T_{n,x_0} è

$$T_{n,x_0}(x) = e^{x_0} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}(x - x_0)^k$$

Nel caso particolare $x_0 = 0$, $T_{n,0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

- $f(x) = \log(1+x)$, $x_0 = 0$, T_n ?

Calcolo delle derivate successive:

$$\log(1+x) \xrightarrow{D} (1+x)^{-1} \xrightarrow{D} -(1+x)^{-2} \xrightarrow{D} 2(1+x)^{-3}$$
$$\downarrow x=0 \qquad \downarrow x=0 \qquad \downarrow x=0 \qquad \downarrow x=0$$
$$0 \qquad 1 \qquad -1 \qquad 2$$

$$\xrightarrow{D} -2\cdot 3(1+x)^{-4} \xrightarrow{D} \cdots \xrightarrow{D} (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\,(1+x)^{-n}.$$
$$\downarrow x=0 \qquad\qquad \downarrow x=0$$
$$-6 \qquad\qquad (-1)^{n-1}\cdot(n-1)!$$

Così il polinomio di Taylor T_n in $x_0=0$ è

$$T_n(x) = 0 + 1\cdot x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!}x^n$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$$