

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 13

ASINTOTI

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$.

La retta $x=x_0$ è un ASINTOTO VERTICALE di f se x_0 è un punto di accumulazione di D e

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty \text{ oppure } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty.$$

La retta $y=mx+q$ è l'ASINTOTO (OBLIQUO se $m \neq 0$, ORIZZONTALE se $m=0$) di f per $x \rightarrow +\infty$ se $+\infty$ è un punto di accumulazione di D e

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx+q)) = 0.$$

Analogamente vale per $-\infty$.

OSSERVAZIONE Se

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R} \text{ e } \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (-\infty)}} (f(x) - mx) = q \in \mathbb{R}$$

allora l'asintoto per $x \rightarrow \substack{+\infty \\ (-\infty)}$ è $y=mx+q$.

ESEMPI

$$\bullet f(x) = \frac{6x^2+1}{2x+3} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\} = (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}, +\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-\frac{3}{2})^\pm} \frac{6x^2+1}{2x+3} = \pm\infty \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2+1}{2x^2+3x} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{6x^2+1}{2x+3} - 3x \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x^2+1-3x(2x+3)}{2x+3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-9x+1}{2x+3} = -\frac{9}{2}.$$

Quindi $y = 3x - \frac{9}{2}$ è l'asintoto obliquo sia per $x \rightarrow +\infty$ che per $x \rightarrow -\infty$.

Allo stesso risultato si arriva con la divisione tra polinomi

$$\begin{array}{r|l} 6x^2 & +1 \\ \underline{6x^2+9x} & \\ \hline & -9x+1 \\ & \underline{-9x-\frac{27}{2}} \\ & \hline & \frac{29}{2} \end{array}$$

Così per $x \rightarrow \pm\infty$

$$f(x) = \frac{6x^2+1}{2x+3} = \underbrace{3x - \frac{9}{2}}_{\text{asintoto}} + \left(\frac{\frac{29}{2}}{2x+3} \right) \rightarrow 0$$

OSSERVAZIONE Si dimostra che se $A(x)$ e $B(x)$ sono polinomi e $\text{grado}(A) - \text{grado}(B) \in \{0, 1\}$ allora $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ ha come asintoto $y = mx + q$ per $x \rightarrow \pm\infty$, dove $mx + q$ è il quoziente della divisione tra $A(x)$ e $B(x)$.

- $f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$ $D = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$

f non ha asintoti verticali. Per $x \in D \setminus \{0\}$

$$f(x) = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x = \underbrace{\frac{|x|}{x}}_{\substack{+1 \text{ se } x > 0 \\ -1 \text{ se } x < 0}} \cdot \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \right) + \underbrace{|x| - x}_{\substack{= 0 \text{ se } x \geq 0 \\ = -2x \text{ se } x \leq 0}}$$

Così

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2} \quad \text{asintoto per } x \rightarrow +\infty$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-\frac{1}{2} - 2x)) = 0 \Rightarrow y = -2x - \frac{1}{2} \quad \text{asintoto per } x \rightarrow -\infty$$

- $f(x) = x + \log(x-1)$ $D = (1, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + \log(x-1)) = -\infty \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ \text{asintoto} \\ \text{verticale} \end{matrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\log(x-1)}{x} \right) = 1 = m?$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \log(x-1) = +\infty \notin \mathbb{R}$$

f non ha un asintoto per $x \rightarrow +\infty$.

- $f(x) = 2x \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)$ $D = [0, +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left(\frac{\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) - 1}{\left(\frac{1}{\sqrt{x}+1}\right)^2} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} \right)^2 = -1$$

$\rightarrow -\frac{1}{2}$

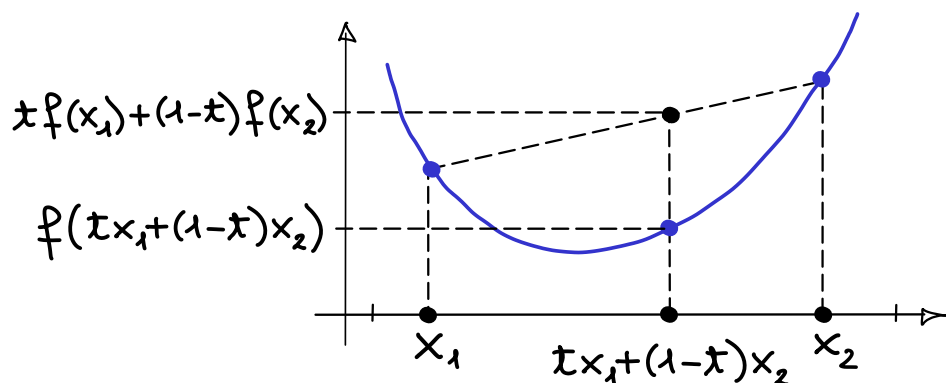
Asintoto per $x \rightarrow +\infty$: $y = 2x - 1$.

CONVESSITÀ E CONCAVITÀ

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e sia I un intervallo $\subseteq D$

f si dice (STRETTAMENTE) CONVESSA in I se

$$\forall x_1, x_2 \in I, \forall t \in (0,1) \quad f(tx_1 + (1-t)x_2) \stackrel{(<)}{\leq} tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$



f si dice (STRETTAMENTE) CONCAVA in I

se $-f$ è (strettamente) convessa in I .

OSSERVAZIONI

- 1) $f(x) = mx + q$ è una funzione sia convessa che concava in $\mathbb{R}$ (non strettamente)
- 2) $f(x) = |x|$ è convessa in $\mathbb{R}$.
- 3) $f(x) = -|x|$ è concava in $\mathbb{R}$.

TEOREMA (CRITERIO DI CONVESSITÀ/CONCAVITÀ)

Sia f derivabile in un intervallo I . Allora

- 1) f è convessa in $I \iff f'$ è crescente in I
- 2) f è concava in $I \iff f'$ è decrescente in I

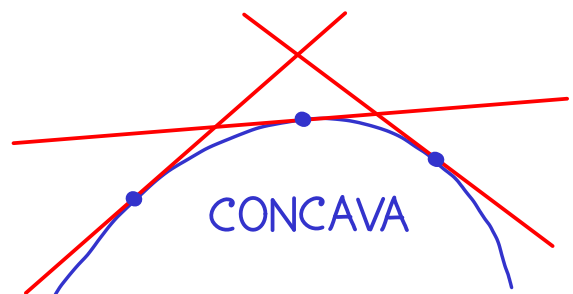
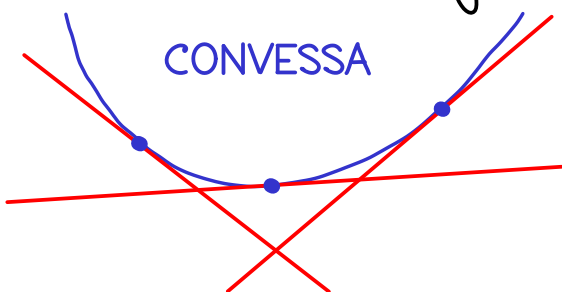
OSSERVAZIONI Per il criterio di monotonia,
se f è derivabile due volte in I :

- 1) f è convessa in $I \iff \forall x \in I \ f''(x) \geq 0$. $(f')' = f''$ DERIVATA SECONDA
2) f è concava in $I \iff \forall x \in I \ f''(x) \leq 0$.

Inoltre

- 1) $\forall x \in I \ f''(x) > 0 \Rightarrow f$ è strettamente convessa in I
2) $\forall x \in I \ f''(x) < 0 \Rightarrow f$ è strettamente concava in I

Se f è convessa (concava) e derivabile in I
allora $\forall x, x_0 \in I \ f(x) \stackrel{(\leq)}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$
ossia il grafico di f sta sopra (sotto) le
sue rette tangenti.



ESEMPIO

$$f(x) = (1+x)^b \text{ per } b > 0 \text{ e } x \in (-1, +\infty)$$

$$f''(x) = b(b-1)(1+x)^{b-2} = \begin{cases} \leq 0 & \text{se } 0 < b \leq 1, f \text{ è concava} \\ \geq 0 & \text{se } b \geq 1, f \text{ è convessa} \end{cases}$$

Quindi per $x > -1$,

$$\text{Se } 0 < b \leq 1 \text{ allora } (1+x)^b \leq f(0) + f'(0)x = 1 + bx$$

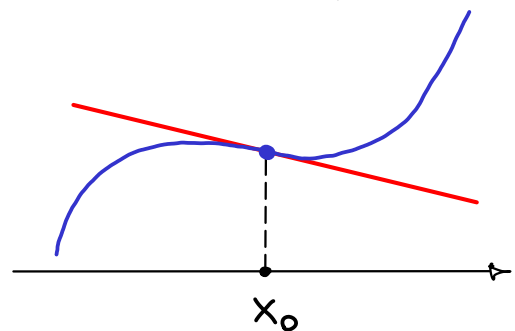
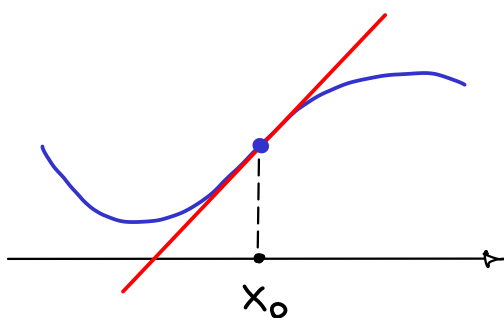
$$\text{Se } b \geq 1 \text{ allora } (1+x)^b \geq f(0) + f'(0)x = 1 + bx$$

$\uparrow$
estensione della disuguaglianza
di Bernoulli

Sia f continua in (x_0-r, x_0+r) e derivabile in x_0 .
 x_0 si dice PUNTO DI FLESSO

se f è strettamente convessa in (x_0-r, x_0)
 e f è strettamente concava in (x_0, x_0+r)
 oppure

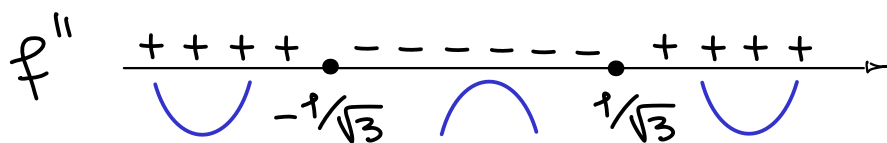
se f è strettamente concava in (x_0-r, x_0)
 e f è strettamente convessa in (x_0, x_0+r)



ESEMPIO

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2} - \frac{2x(-2 \cdot 2x)}{(1+x^2)^3} = \frac{2(-1+3x^2)}{(1+x^2)^3}$$



f è convessa in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ e in $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$.

f è concava in $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$.

f ha due punti di flesso: $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ e $\frac{1}{\sqrt{3}}$.