ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 12

TEOREMA (DI LAGRANGE O DEL VALOR MEDIO)

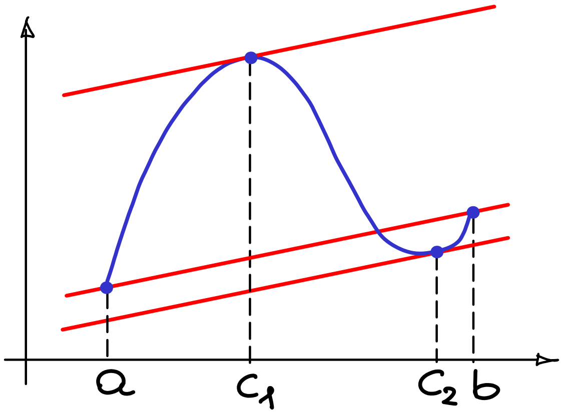
Se f è una funzione è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) allora $\exists c \in (a,b)$ tale che

rette parallele

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

coefficiente angolare della retta secante passante per $(a,f(a))$ e $(b,f(b))$

coefficiente angolare della retta tangente in $(c,f(c))$



dim. Definiamo la funzione ausiliaria

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a) \right) \qquad (*)$$

che per ipotesi è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b). Inoltre

$$\left.\begin{array}{l} h(a) = f(a) - f(a) = 0, \\ h(b) = f(b) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{b-a}}(\cancel{b-a}) + f(a) \right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow h(a) = h(b)$$

Per il teo di Weierstrass applicato a h in $[a,b]$ $\exists x_{min}$ e $\exists x_{max}$ in $[a,b]$ punti di minimo e di massimo assoluto di h.

Ci sono due casi possibili.

1) ENTRAMBI i punti x_{min} e x_{max} sono in $\{a,b\}$.
In tal caso $h(x_{min}) = h(x_{max})$ (perché $h(a)=h(b)$) e dunque h è costante in $[a,b]$. Allora

$$\forall x \in (a,b) \quad h'(x)=0.$$

2) ALMENO UNO dei punti x_{min} e x_{max} è in (a,b).
Per il teo. di Fermat applicato a h in quel punto si ha che

$$h'(x_{min})=0 \quad \text{oppure} \quad h'(x_{max})=0.$$

Quindi sia nel caso 1) che nel caso 2)

$$\exists c \in (a,b) \text{ tale che } h'(c)=0.$$

Infine

$$0 = h'(c) \overset{(*)}{=} f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

$\square$

OSSERVAZIONE
Nel caso particolare in cui $f(b)=f(a)$,
il teorema del valor medio si dice anche

TEOREMA DI ROLLE:

Se f è una funzione è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b) allora $\exists c \in (a,b)$ tale che

$$f'(c)=0.$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DI MONOTONIA)

Sia f derivabile in un intervallo I.
Allora

1) f è crescente in $I \iff \forall x \in I \;\; f'(x) \geq 0$.

2) f è decrescente in $I \iff \forall x \in I \;\; f'(x) \leq 0$.

dim. Caso 1) (il caso 2) è simile).

($\Rightarrow$) Se $x \in I$ allora il segno del rapporto incrementale è

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \begin{cases} \left(\dfrac{\geq 0}{+}\right)^{\geq 0} & \text{se } h>0 \\ \left(\dfrac{\leq 0}{-}\right)_{\leq 0} & \text{se } h<0 \end{cases}$$

Quindi in ogni caso il rapporto è ≥ 0 e per la permanenza del segno

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0.$$

($\Leftarrow$) Siano $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$.
Dobbiamo verificare che $f(x_1) \leq f(x_2)$.
Per il teo. del valor medio applicato a f in $[x_1, x_2]$, $\exists\, c \in (x_1, x_2)$ tale che

per ipotesi

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\underbrace{(x_2 - x_1)}_{>0}} = f'(c) \geq 0$$

e quindi necessariamente $f(x_2) \geq f(x_1)$.

$\square$

OSSERVAZIONI Sia I un intervallo.

1) Se $\forall x \in I$ $f'(x)=0$ allora f è costante in I.

2) Se $\forall x \in I$ $f'(x)>0$ allora f è strettamente crescente in I.

Non vale l'implicazione opposta: $f(x)=x^3$ è strettamente crescente in $\mathbb{R}$ ma $f'(x)=3x^2$ e $f'(0)=0$.

3) Se $\forall x \in I$ $f(x)<0$ allora f è strettamente decrescente in I.

ESEMPI

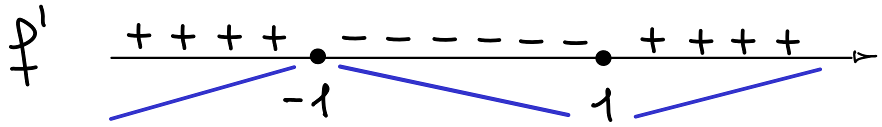
- $f(x)=x^3-3x+1$

f è continua in $D=\mathbb{R}$.

f non ha punti di max/min assoluto perché

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-3x+1)=+\infty \quad e \quad \lim_{x\to-\infty}(x^3-3x+1)=-\infty$$

f è derivabile in $\mathbb{R}$ e $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$



f è crescente in $(-\infty,-1]$ e in $[1,+\infty)$

f è decrescente in $[-1,1]$

$x=-1$ è un punto di max. relativo in $\mathbb{R}$ e $f(-1)=3$.

$x=1$ è un punto di min. relativo in $\mathbb{R}$ e $f(1)=-1$.

- $f(x) = x^x = e^{x\log(x)}$

f è continua e positiva in $D = (0, +\infty)$
f non ha punti di max. assoluto perché

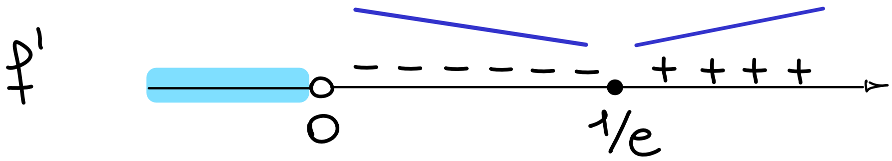
$$\lim_{x\to+\infty} x^x = +\infty .$$

Si noti che 0 è un punto di accumulazione di D e

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\log(x)} = e^0 = 1$$

f è derivabile in $(0,+\infty)$ e per $x>0$

$$f(x) = e^{x\log(x)}\left(\log(x) + x\cdot\frac{1}{x}\right) = \underbrace{x^x}_{>0}\cdot(\log(x)+1)$$



f è crescente in $[1/e, +\infty)$.
f è decrescente in $(0, 1/e]$.
$x = 1/e$ è un punto di min. assoluto in $(0,+\infty)$.
Il valore minimo è $f(1/e) = e^{-1/e} \in (0,1)$.

- $f(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$

f è continua in $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -\frac{\pi}{2} + 0 = -\frac{\pi}{2}$$

e

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\operatorname{arctg}(x)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\operatorname{arctg}(x)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right)=0-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}.$$

f è derivabile in $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ e per $x\neq 0$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

e quindi f è costante su ogni intervallo.

Visti i limiti calcolati agli estremi la costante è $\frac{\pi}{2}$ in $(0,+\infty)$ ed è $-\frac{\pi}{2}$ in $(-\infty,0)$ ossia

$$\operatorname{arctg}(x)+\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \text{se } x>0\\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } x<0.\end{cases}$$