# ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 11

## MASSIMI E MINIMI DI UNA FUNZIONE

Siano $f: D \to \mathbb{R}$, $A \subseteq D$ e $x_0 \in A$.

$x_0$ si dice PUNTO DI MASSIMO ASSOLUTO di $f$ in $A$
se $\qquad \forall x \in A \quad f(x) \leq f(x_0)$
ossia $\max\{f(x) : x \in A\} = f(x_0)$.

$x_0$ si dice PUNTO DI MASSIMO RELATIVO di $f$ in $A$
se $\exists r > 0 : \forall x \in A \cap I(x_0, r) \quad f(x) \leq f(x_0)$.

$x_0$ si dice PUNTO DI MINIMO ASSOLUTO di $f$ in $A$
se $\qquad \forall x \in A \quad f(x) \geq f(x_0)$
ossia $\min\{f(x) : x \in A\} = f(x_0)$.

$x_0$ si dice PUNTO DI MINIMO RELATIVO di $f$ in $A$
se $\exists r > 0 : \forall x \in A \cap I(x_0, r) \quad f(x) \geq f(x_0)$.

### ESEMPIO

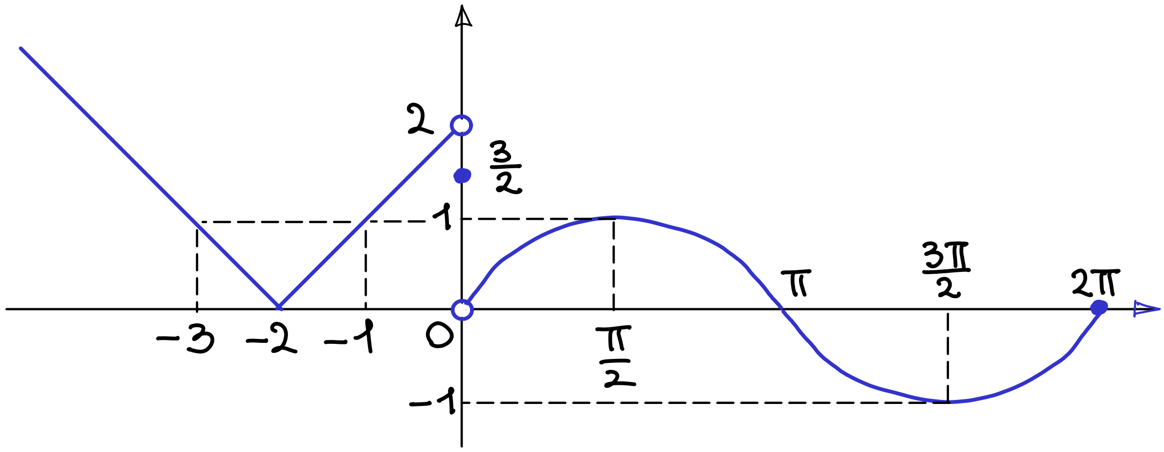
Consideriamo la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x) & \text{se } x \in (0, 2\pi] \\ \frac{3}{2} & \text{se } x = 0 \\ |x+2| & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$f$ è definita in $D = (-\infty, 2\pi]$ e continua in $D \setminus \{0\}$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \operatorname{sen}(x) = 0$$
$$\neq$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} |x+2| = 2$$

$\nexists \lim_{x \to 0} f(x)$




Se $A = D = (-\infty, 2\pi]$

i punti di max. relativo di $f$ in $A$ sono $\frac{\pi}{2}$ e $2\pi$;

in $A$ non ci sono punti di max. assoluto di $f$

perché

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x = +\infty \quad ;$$

i punti di min. relativo di $f$ in $A$ sono $-2$ e $\frac{3\pi}{2}$;

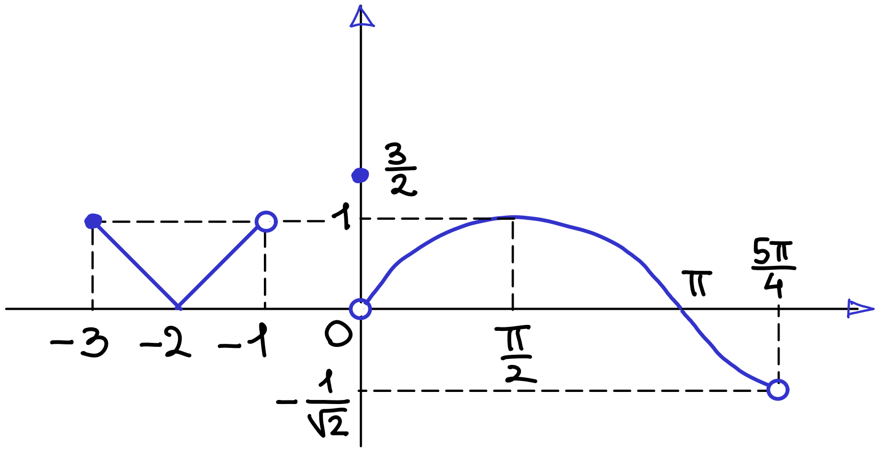
in $A$ c'è un punto di min. assoluto di $f$ ed è $\frac{3\pi}{2}$

perché

$$\forall x \in (-\infty, 2\pi] \qquad f(x) \geq f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$$

VALORE MINIMO $-1$

Se $A = [-3, -1) \cup \left[0, \frac{5\pi}{4}\right)$ allora




punti di max. relativo di $f$ in $A$: $-3, 0, \frac{\pi}{2}$;

$0$ è un punto di max. assoluto di $f$ in $A$;

VALORE MASSIMO $\frac{3}{2}$

punti di min. relativo di $f$ in $A$: $-2$;

non ci sono punti di min. assoluto di $f$ in $A$.

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$. Se $f$ è derivabile in $x_0$ e $f'(x_0)=0$ allora $x_0$ si dice PUNTO STAZIONARIO.

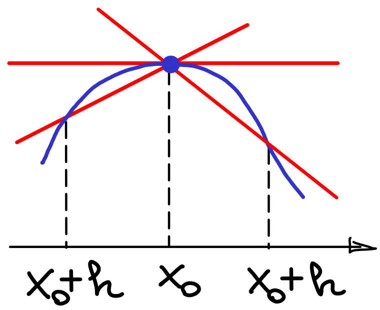
$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DI FERMAT)

Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ e sia $x_0$ un punto di max o min. relativo di $f$ in $(a,b)$.
Se $f$ è derivabile in $x_0$ allora $f'(x_0)=0$ ossia $x_0$ è un punto stazionario.

dim. Caso $x_0$ punto di max. relativo.
Per definizione di punto di max. relativo
$\exists r>0$ tale che $(x_0-r, x_0+r) \subseteq (a,b)$  $x_0$ è INTERNO ad $(a,b)$
e $\forall x \in (x_0-r, x_0+r)$ $f(x) \leq f(x_0)$.  $x_0$ è un punto di max relativo

Allora il segno del rapporto incrementale in $x_0$ è

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \begin{cases} \overbrace{\left(\frac{\leq 0}{+}\right)}^{\leq 0} & \text{se } 0<h<r \\ \underbrace{\left(\frac{\leq 0}{-}\right)}_{\geq 0} & \text{se } -r<h<0 \end{cases}$$




Quindi dato che $f$ è derivabile in $x_0$, per la permanenza del segno

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leq 0 \\ f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x_0)=0$$

$\square$

# PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE (2ª PARTE)

**TEOREMA** (DI BOLZANO-WEIERSTRASS)
Se $\{x_n\}_n$ è una successione limitata allora $\exists$ una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}_k$ convergente.

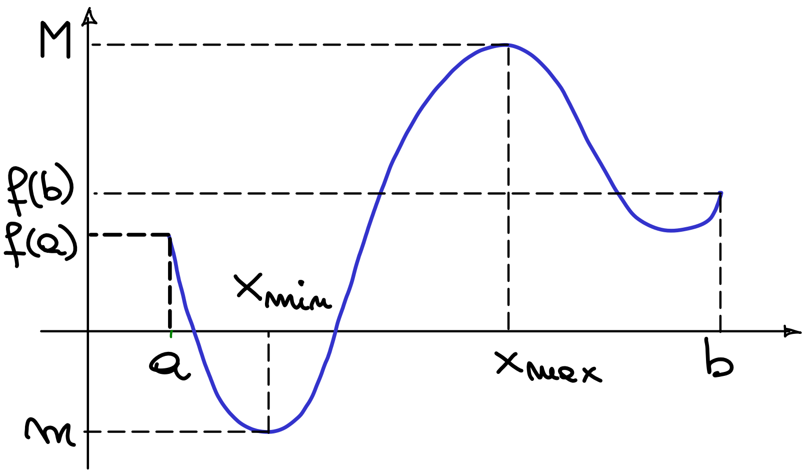
**TEOREMA** (DI WEIERSTRASS)

INSIEME COMPATTO

Se $f$ è una funzione continua in $[a,b]$ allora $\exists\, x_{min} \in [a,b]$ e $\exists\, x_{max} \in [a,b]$ tali che

$$\forall x \in [a,b] \quad f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$$

ossia $x_{min}$ è un punto di minimo assoluto e $x_{max}$ è un punto di massimo assoluto di $f$ in $[a,b]$.




OSSERVAZIONE Se $f$ è continua in $[a,b]$ allora per il teo. dei valori intermedi e il teo. di Weierstrass $f$ assume TUTTI i valori tra il valore massimo $M = f(x_{max})$ e il valore minimo $m = f(x_{min})$: $f([a,b]) = [m, M]$.

dim. Esistenza di $x_{max}$ (per $x_{min}$ è simile).

Sia $M = \sup\{ f(x) : x \in [a,b] \} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Per le proprietà dell'estremo superiore:

1) Se $M = +\infty$ allora $\forall n \in \mathbb{N}^+ \; \exists x_n \in [a,b]$ tale che $f(x_n) > n$.

2) Se $M \in \mathbb{R}$ allora $\forall n \in \mathbb{N}^+ \; \exists x_n \in [a,b]$ tale che $M - \underbrace{\frac{1}{n}}_{\varepsilon > 0} < f(x_n) \leq M$.

Sia in 1) che in 2) si ha che

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = M \quad (*) \; .$$

Siccome $\{x_n\}_n \subseteq [a,b]$, $\{x_n\}_n$ è limitata e per il teo. di Bolzano-Weierstrass $\exists$ una sotto-successione $\{x_{n_k}\}_k$ convergente.

Chiamiamo $x_{max}$ il suo limite:

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_{max} \; .$$

Dato che $a \leq x_{n_k} \leq b$ anche $x_{max} \in [a,b]$.

Per ipotesi, $f$ è continua in $[a,b]$.

Così, per la continuità di $f$ in $x_{max} \in [a,b]$.

$$M \overset{(*)}{=} \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_{max})$$

continuità

limite sottosuccessione

Si conclude che

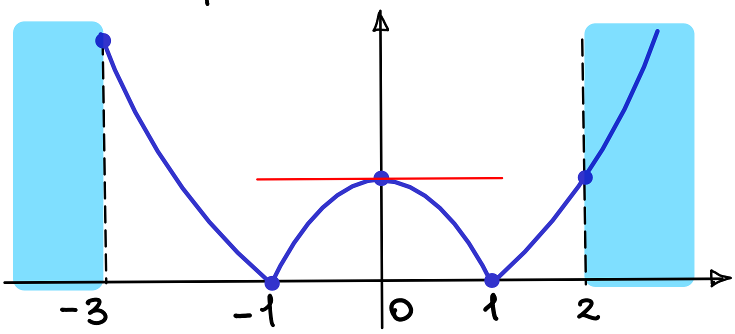
$$\forall x \in [a,b] \quad f(x) \leq M = f(x_{max}).$$

$\square$

OSSERVAZIONE Se $f$ è continua in $[a,b]$ allora per individuare i punti di max/min assoluti in $[a,b]$ è necessario confrontare i valori di $f$ nei punti stazionari interni (per il teo. di Fermat), negli estremi $a$ e $b$ e nei punti dove $f$ non è derivabile (dove il teo. di Fermat non è applicabile).

**ESEMPIO**

Sia la funzione $f(x)=|x^2-1|$ in $[-3,2]$.




$f$ è continua in $[-3,2]$ e $f'(x)=\begin{cases} 2x & \text{se } |x|>1 \\ -2x & \text{se } |x|<1 \end{cases}$

$f$ non è derivabile in $x=1$ e $x=-1$ e l'unico punto stazionario è $x=0 \in (-3,2)$.

Quindi per individuare i max/min assoluti di $f$ in $[-3,2]$ basta confrontare i valori

$$f(0)=1,\quad f(-3)=8,\quad f(2)=3,\quad f(1)=f(-1)=0$$

punto stazionario — estremi di $[-3,2]$ — punti di non derivabilità

Così il punto di max. assoluto è $x=-3$ e i punti di minimo assoluto sono $x=1$ e $x=-1$.

$x=0$ e $x=2$ sono punti di max. relativo.