ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 9

ESEMPI

- $$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\underbrace{\left(\frac{sen(x)}{x}\right)}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)}_{\to 1} = 1$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$sen^2(x) = 1-\cos^2(x)$

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2}\cdot\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \underbrace{\left(\frac{sen(x)}{x}\right)^2}_{\to 1}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{1+\cos(x)}\right)}_{\to \frac{1}{2}} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{arcsen(x)}{x} \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to 0}\frac{y}{sen(y)} = 1$$

$y = arcsen(x) \to 0$

- $$\lim_{x\to 0}\frac{arctg(x)}{x} \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to 0}\frac{y}{tg(y)} = 1$$

$y = arctg(x) \to 0$

- $$\lim_{x\to +\infty} sen(x) = \nexists$$

perché $x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \longrightarrow +\infty \Rightarrow sen(x_n) = (-1)^n \to$ non esiste

- $$\lim_{x\to -\infty} sen(x) \underset{\uparrow}{=} -\lim_{y\to +\infty} sen(y) = \nexists$$

$y = -x \to +\infty$

- $$\lim_{x\to +\infty}\frac{sen(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{sen(x)}{x} = 0$$ e

Per $x \to \pm\infty$, $0 \le \left|\frac{sen(x)}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \longrightarrow 0$

- $$\lim_{x\to \pi}\frac{sen(x)}{x-\pi} \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to 0}\frac{sen(y+\pi)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{-sen(y)}{y} = -1$$

$y = x-\pi \to 0$

CONFRONTI TRA INFINITESIMI

Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ e supponiamo

che $\qquad \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \\ l \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ \pm\infty \end{cases}$

1) nel caso 0 diciamo che per $x \to x_0$, $f(x)$ è un INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE a $g(x)$
2) nel caso $l \neq 0$ diciamo che per $x \to x_0$, $f(x)$ è un INFINITESIMO DELLO STESSO ORDINE di $g(x)$
3) nel caso $\pm\infty$ diciamo che per $x \to x_0$, $f(x)$ è un INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE a $g(x)$

Se $\alpha > 0$, per $x \to x_0$, $(x-x_0)^\alpha$ è un infinitesimo di ordine α.

ESEMPI

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^3-3x^2+4x}{x^2-x^a} = {\color{red}?}$ con $a>0$ e $a \neq 2$

Se $0<a<2$ allora per $x \to 0^+$

$$\frac{2x^3-3x^2+4x}{x^2-x^a} = \frac{x(\overset{\to 0}{2x^2}-\overset{\to 0}{3x}+4)}{x^a(\underset{\to 0}{x^{2-a}}-1)} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } 0<a<1 \\ -4 & \text{se } a=1 \\ -\infty & \text{se } 1<a<2 \end{cases}$$

Se $2<a$ allora per $x \to 0^+$

$$\frac{2x^3-3x^2+4x}{x^2-x^a} = \frac{\cancel{x}(\overset{\to 0}{2x^2}-\overset{\to 0}{3x}+4)}{x^{\cancel{2}}(1-\underset{\to 0}{x^{a-2}})} \longrightarrow +\infty$$

- $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2} = 2$$

$$\frac{x-2x}{x^2-3x+2} = \frac{x\cancel{(x-2)}}{(x-1)\cancel{(x-2)}} \to \frac{2}{2-1} = 2$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x)-\mathrm{tg}(x)}{x^3} \leftarrow \mathrm{sen}(x) - \frac{\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} = \mathrm{sen}(x)\frac{(\cos(x)-1)}{\cos(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \underbrace{\left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}\right)}_{\to -\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)}_{\to 1} = -\frac{1}{2}.$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\log(\cos(x))}{x^2} = \left(\frac{\log(1+\overbrace{(\cos(x)-1)}^{\to 0})}{\underbrace{(\cos(x)-1)}_{\to 0}}\right) \cdot \left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}\right) \to 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

- $$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(x)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\mathrm{tg}(y)} = 1$$

$$y = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(x) \to 0$$

$$x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \frac{1}{\mathrm{tg}(y)}$$

- $$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x\right) = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x = x\left(\left(1+\overbrace{\left(\frac{2x^2+1}{x^3}\right)}^{\to 0}\right)^{1/3} - 1\right)$$

$$= \underbrace{\left(x\cdot\frac{2x^2+1}{x^3}\right)}_{\to 2} \cdot \underbrace{\left(\frac{\left(1+\frac{2x^2+1}{x^3}\right)^{1/3} - 1}{\frac{2x^2+1}{x^3}}\right)}_{\to \frac{1}{3}} \to \frac{2}{3}$$

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE (1ª PARTE)

TEOREMA (DEGLI ZERI) Se f è una funzione continua in $[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b)<0$ allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0)=0$.

dim. Caso $f(a)<0$ e $f(b)>0$. Costruiamo ricorsivamente due successioni $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ nel seguente modo: $a_0=a$, $b_0=b$ e dati $a_0, a_1, \dots, a_n$ e $b_0, b_1, \dots, b_n$ sia

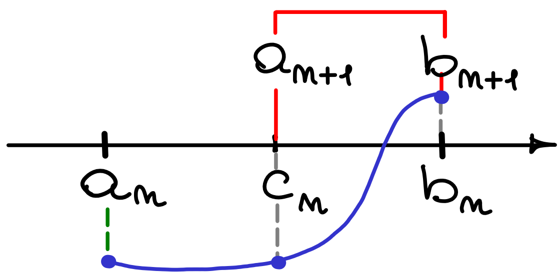
$$c_n = \frac{a_n+b_n}{2} \quad \text{PUNTO MEDIO di } [a_n, b_n]$$

Abbiamo 3 casi possibili (ed esclusivi).

1) Se $f(c_n)=0$ allora $x_0=c_n$ e abbiamo finito.

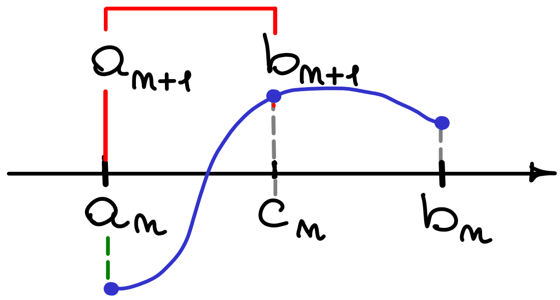
2) Se $f(c_n)<0$ allora poniamo

$a_{n+1}=c_n$ e $b_{n+1}=b_n$



3) Se $f(c_n)>0$ allora poniamo

$a_{n+1}=a_n$ e $b_{n+1}=c_n$



Se 1) non si verifica mai, $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ sono tali che

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad a_n \underset{\substack{\uparrow\\ \{a_n\}\text{ è crescente}}}{\leq} a_{n+1} \overset{\substack{\{a_n\}\text{ è sup. limitata}\\ \downarrow}}{<} b \quad e \quad a \underset{\substack{\uparrow\\ \{b_n\}\text{ è inf. limitata}}}{<} b_{n+1} \overset{\substack{\{b_n\}\text{ è decrescente}\\ \downarrow}}{\leq} b_n$$

e quindi convergono entrambe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n,\ n\geq 0\} = A$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{b_n,\ n\geq 0\} = B$$

con $a \leq A \leq B \leq b$.

Inoltre al passo n-simo l'intervallo $[a,b]$ è stato diviso a metà n volte e quindi

$$B-A \xleftarrow{n\to\infty} b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow B=A.$$

Chiamiamo questo valore comune x_0 e verifichiamo che $f(x_0)=0$.

Dato che f è continua in $x_0\in[a,b]$,

$$a_n \to x_0 \Rightarrow \overbrace{f(a_n)}^{<0} \to f(x_0) \leq 0$$

permanenza del segno

$$b_n \to x_0 \Rightarrow \underbrace{f(b_n)}_{>0} \to f(x_0) \geq 0$$

Così $0 \leq f(x_0) \leq 0$ ossia $f(x_0)=0$. $\square$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DEI VALORI INTERMEDI)

Se f è una funzione continua in $[a,b]$ e y_0 è un valore compreso strettamente tra $f(a)$ e $f(b)$ allora $\exists x_0\in(a,b)$ tale che $f(x_0)=y_0$.

OSSERVAZIONE

Se f è una funzione continua in un intervallo I allora l'insieme immagine $f(I)$ è ancora un intervallo.

ESEMPIO

Contare il numero di soluzioni di ciascuna delle seguenti equazioni:

1) $2^x = \operatorname{sen}(\pi x)$,

2) $\operatorname{arcsen}(2^x) = \pi x$.

L'equazione 1) ha infinite soluzioni.

Sia $f(x) = 2^x - \operatorname{sen}(\pi x)$. f è continua in $\mathbb{R}$ e

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad f(-2n) = 2^{-2n} - 0 > 0$$
$$f\left(-2n + \tfrac{1}{2}\right) = 2^{-2n+\frac{1}{2}} - 1 < 0$$

e per il teorema degli zeri $\exists\, x_n \in \left(-2n, -2n + \tfrac{1}{2}\right)$ tale che $f(x_n) = 0$.

L'equazione 2) non ha soluzioni.

Sia $f(x) = \operatorname{arcsen}(2^x) - \pi x$. f è continua in

$$D = \{ x : 2^x \in [-1, 1] \} = (-\infty, 0].$$

Inoltre $\forall x \leq 0$,

$$f(x) = \underbrace{\operatorname{arcsen}(\overbrace{2^x}^{>0})}_{>0} + \underbrace{(-\pi x)}_{\geq 0} > 0.$$

f non si annulla MAI!