

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 8

LIMITI DI FUNZIONI

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ si dice RETTA ESTESA

Se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $r > 0$ l'INTERNO di centro x_0 e raggio r è definito come

$$I(x_0, r) = \begin{cases} (x_0 - r, x_0 + r) & \text{se } x_0 \in \mathbb{R} \\ (r, +\infty) & \text{se } x_0 = +\infty \\ (-\infty, -r) & \text{se } x_0 = -\infty \end{cases}$$

Nel caso $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ si pone

$$I^+(x_0, r) = (x_0, x_0 + r) \quad \text{INTERNO DESTRO}$$

$$I^-(x_0, r) = (x_0 - r, x_0) \quad \text{INTERNO SINISTRO}$$

Se $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ e $D \subseteq \mathbb{R}$ allora x_0 si dice PUNTO DI ACCUMULAZIONE di D se

$$\forall r > 0 \quad (D \cap I(x_0, r)) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset.$$

OSSERVAZIONE Se D è un intervallo in $\mathbb{R}$ allora i suoi punti di accumulazione sono tutti i punti di D compresi gli estremi.

D	punti di accumulazione di D
$\{-1\} \cup (0, 2) \cup \{3\}$	$[0, 2]$
$[-1, +\infty)$	$[-1, +\infty) \cup \{+\infty\}$
$(-\infty, 3) \cup (3, 4)$	$(-\infty, 4] \cup \{-\infty\}$
$[1, 2] \cup [3, 4]$	$[1, 2] \cup [3, 4]$
$\mathbb{R}$	$\overline{\mathbb{R}}$

Siano $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 punto di accumulazione di D ,
 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si dice che il LIMITE DI $f(x)$ PER x CHE TENDE
A x_0 VALE l e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow x_0^{\pm}} f(x) = l \quad \begin{array}{l} + \text{ LIMITE DESTRO} \\ - \text{ LIMITE SINISTRO} \end{array}$$

se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 : \forall x \in (D \cap I(x_0, \eta)) \setminus \{x_0\} \quad f(x) \in I(l, \varepsilon).$$

OSSERVAZIONE Dalla definizione segue che
se $x_0 \in D$ allora il valore del limite non
dipende da $f(x_0)$.

TEOREMA ("PONTE")

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \iff \quad \forall \{x_n\}_n \subseteq D \setminus \{x_0\} \text{ tale che } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \text{ si ha } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = l.$$

limite di funzione limiti di successioni

PROPRIETÀ DEI LIMITI DI FUNZIONI

Grazie al teorema "ponte" valgono le proprietà
analoghe viste per i limiti di successioni.

1) Il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ se esiste è unico.

2) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ allora $\exists \eta > 0$ tale che
 f è limitata in $(D \cap I(x_0, \eta)) \setminus \{x_0\}$.

3) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ allora $\exists r > 0$ tale che

$$\forall x \in (D \cap I(x_0, r)) \setminus \{x_0\} \quad f(x) > 0.$$

4) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ e $\exists r > 0$ tale che

$$\forall x \in (D \cap I(x_0, r)) \setminus \{x_0\} \quad f(x) \leq g(x) \text{ allora } l_1 \leq l_2.$$

5) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ e $\exists r > 0$ tale che

$$\forall x \in (D \cap I(x_0, r)) \setminus \{x_0\} \quad f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

$$\text{allora } \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l.$$

6) Se f è limitata in un intorno di x_0 e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0 \text{ allora } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = 0.$$

7) Algebra dei limiti: se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$ con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = l_1 \pm l_2 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 \cdot l_2.$$

$$\text{Se } l_2 \neq 0 \text{ allora } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}.$$

8) Se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

9) Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ e $\lim_{x \rightarrow l} g(x) = L$ e $\exists r > 0$ tale che

$$\forall x \in (D_f \cap I(x_0, r)) \setminus \{x_0\} \quad f(x) \neq l \text{ allora } \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L.$$

$\nwarrow$ dominio di f

FUNZIONI CONTINUE

Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D$.

Se x_0 è un punto di accumulazione di D e

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

allora si dice che f è CONTINUA in x_0 .

f si dice continua in $A \subseteq D$ se f è continua in ogni punto $x_0 \in A$.

OSSERVAZIONE

Le funzioni elementari $|x|$, x^a , a^x , $\log_e(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ e $\operatorname{arctg}(x)$ sono continue nel loro dominio.

Per le proprietà dei limiti se f e g sono continue allora $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g e $f \circ g$ sono continue nel loro dominio.

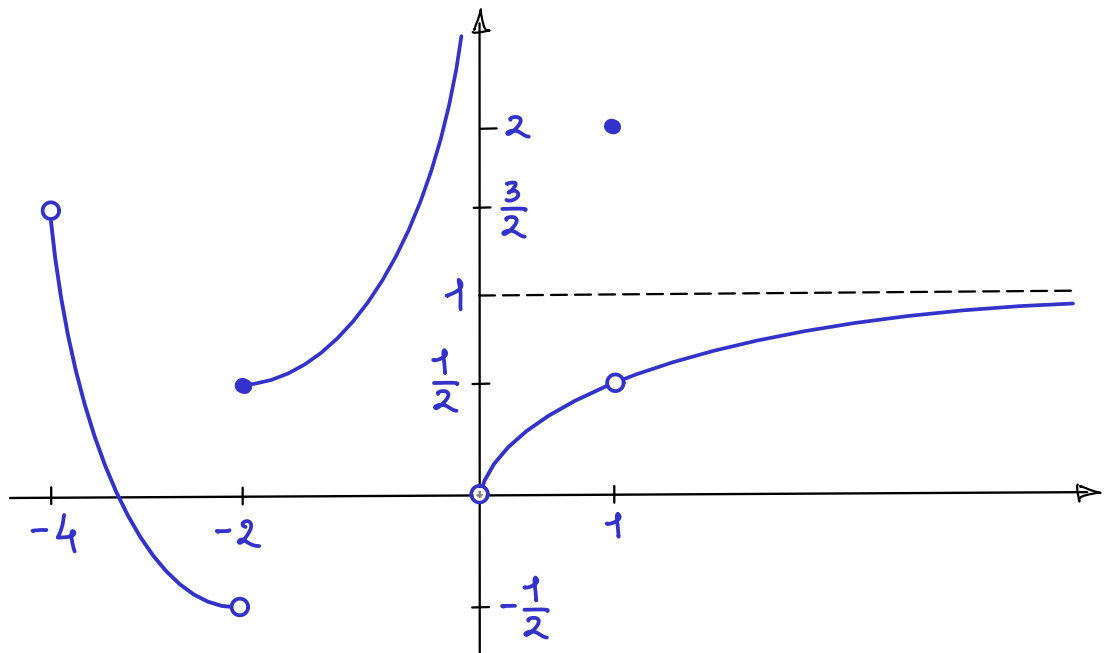
↑ composizione
 $f(g(x))$

ESEMPIO

Sia

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x+1} & \text{se } x \in (0, 1) \cup (1, +\infty) \\ 2 & \text{se } x = 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x \in [-2, 0) \\ \frac{(x+2)^2 - 1}{2} & \text{se } x \in (-4, -2) \end{cases}$$

Disegnare il grafico di f in $D = (-4, +\infty) \setminus \{0\}$ e dire in quali punti di D la funzione f è continua.



I punti di accumulazione di D sono
 $[-4, +\infty) \cup \{+\infty\}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{2} \neq f(1) = 2.$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{(x+2)^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} -\frac{1}{x} = +\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\frac{1}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{(x+2)^2 - 1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) = 1$$

f è continua in $D \setminus \{-2, 1\}$

↑ punti di discontinuità

LIMITI NOTEVOLI

Per il teorema "ponte" valgono i seguenti limiti:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log_a(x)}{x^b} = 0$ per $a > 0, a \neq 1$ e $b > 0$.

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b \cdot \log_a(x) \stackrel{y = \frac{1}{x} \rightarrow +\infty}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{y^b} (-b \log_a(y)) = 0$ per $a > 0, a \neq 1$ e $b > 0$.

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$ per $a > 1$ e $b > 0$.

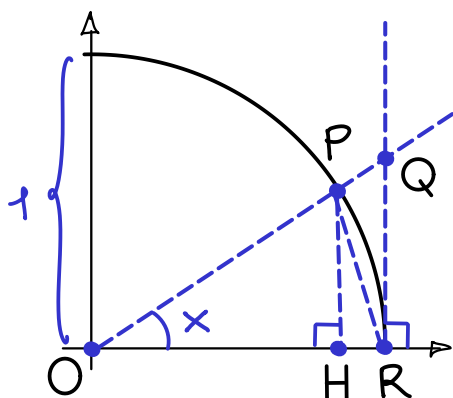
- $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + a \cdot x)^{\frac{1}{x}} = e^a$ per $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$ per $a \in \mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$



Dato che $\frac{\sin(x)}{x}$ è pari basta $x \rightarrow 0^+$.

Per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $PH = \sin(x)$, $QR = \tan(x)$

$$\Delta OPR \leq \Delta OPR \leq \Delta OQR$$

$$\text{Area}(\Delta OPR) \leq \text{Area}(\Delta OPR) \leq \text{Area}(\Delta OQR)$$

$$\frac{\sin(x)}{2} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{x}{2} \stackrel{(2)}{\leq} \frac{\tan(x)}{2}$$

da cui, per $x \rightarrow 0^+$,

$$1 \leftarrow \cos(x) \stackrel{(2)}{\leq} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{(1)}{\leq} 1 \rightarrow 1.$$

Allora per doppio confronto $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.