

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 5

LIMITI DI SUCCESSIONI

Una SUCCESSIONE REALE $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ è una funzione che ad ogni intero $n \geq n_0$ associa un numero reale $a_n = \text{termine } n\text{-simo}$
 $\quad \quad \quad \swarrow$
 $\quad \quad \quad \text{indice}$

ESEMPI

- $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n \geq 1}$ $\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ -1, & \frac{1}{2}, & -\frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & -\frac{1}{5}, & \dots, & \frac{(-1)^n}{n}, \dots \end{matrix}$
- $\left\{ \sqrt{n^2 - 5} \right\}_{n \geq 3}$ $\begin{matrix} & 3 & 4 & 5 & 6 & & n \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ 2, & \sqrt{11}, & \sqrt{20}, & \sqrt{31}, & \dots, & \sqrt{n^2 - 5}, \dots \end{matrix}$

IL LIMITE DI UNA SUCCESSIONE $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ è definito come

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \forall M \in \mathbb{R} \quad \text{DEFINITIVAMENTE} \quad \exists N \geq n_0 : \forall n > N \quad a_n > M \\ l \in \mathbb{R} & \text{se } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \geq n_0 : \forall n > N \quad |a_n - l| < \varepsilon \\ -\infty & \text{se } \forall M \in \mathbb{R} \quad \exists N \geq n_0 : \forall n > N \quad a_n < M \\ \nexists & \text{altrimenti} \end{cases}$$

NON ESISTE

$$|a_n - l| < \varepsilon \iff l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon \iff \begin{array}{c} \text{---} a_n \text{---} \\ \text{---} l - \varepsilon \quad l \quad l + \varepsilon \text{---} \end{array}$$

Se il limite vale $l \in \mathbb{R}$ la successione si dice CONVERGENTE, se vale $+\infty$ o $-\infty$ si dice DIVERGENTE, se $\nexists$ si dice INDETERMINATA.

OSSERVAZIONE

Vale la DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad |a + b| \leq |a| + |b|. \quad (\text{DT})$$

ESEMPI

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = +\infty$
perché $\forall M \in \mathbb{R} \quad n^2 > M$ se $n > \sqrt{|M|}$ *definitivamente*
- $\lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \sqrt{n} = -\infty$
perché $\forall M \in \mathbb{R} \quad 2 - \sqrt{n} < M$ se $n > (2 - M)^2$ *definitivamente*
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$
perché $\forall \varepsilon > 0 \quad \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ se $n > \frac{1}{\varepsilon}$ *definitivamente*
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = \nexists$

$\{(-1)^n\}_{n \geq 0}$ è limitata e quindi non tende a $\pm\infty$.

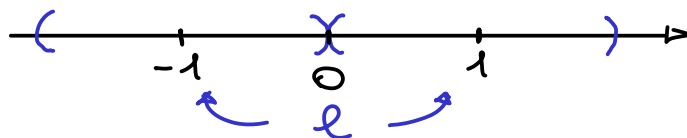
Se esistesse un limite $l \in \mathbb{R}$ allora per $\varepsilon = 1 > 0$

$$\exists N \geq 0 : \forall n \geq N \quad |(-1)^n - l| < \varepsilon = 1$$

ossia $|1 - l| < 1$ per n pari e $|-1 - l| < 1$ per n dispari

$$2 = |1 - l + l + 1| \stackrel{DT}{\leq} |1 - l| + |l + 1| < 1 + 1 \leq 2$$

da cui $2 < 2$ contraddizione. Il limite non esiste.



OSSERVAZIONE

Il valore del limite di una successione $\{a_n\}_{n \geq n_0}$ non dipende dall'indice iniziale n_0 o da un numero finito dei suoi termini.

PROPRIETÀ DEI LIMITI

1) UNICITÀ: il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ se esiste è unico.

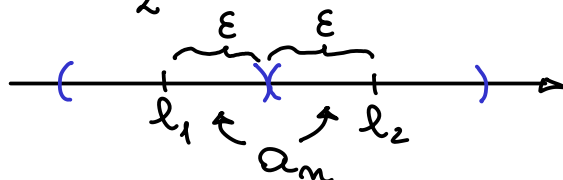
dim. Supponiamo che $\exists l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ (caso finito-finito)

$$\text{con } l_1 \neq l_2: \forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists N_1: \forall n > N_1 |a_n - l_1| < \varepsilon \\ \exists N_2: \forall n > N_2 |a_n - l_2| < \varepsilon \end{cases}$$

allora $\forall n > \max(N_1, N_2)$

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - a_n + a_n - l_2| \stackrel{DT}{\leq} |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon$$

Scegliendo $\varepsilon = \frac{|l_1 - l_2|}{2} > 0$ si ha una contraddizione.



□

2) Se il limite $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$ allora $\{a_n\}_n$ è limitata. Non vale il viceversa: $\{(-1)^n\}$ è una successione limitata ma non ha limite.

3) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ esiste allora per ogni sottosuccessione $\{a_{n_k}\}_k$ si ha $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \dots$ sottosuccessione $a_2, a_5, a_7, a_8, \dots$

OSSERVAZIONE

Se una successione ha due sottosuccessioni che convergono a limiti diversi allora la successione non ha limite.

Ad esempio $\{(-1)^n\}_n$ non ha limite perché

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(-1)^{2M}}_{=1} = +\infty \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(-1)^{(2M+1)}}_{=-1} = -\infty$$

2M ← PARI 2M+1 ← DISPARI

4) PERMANENZA DEL SEGNO: se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l > 0$
oppure $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ allora $a_n > 0$ definitivamente.

dim. Supponiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l > 0$ (caso finito)

Allora per $\varepsilon = \frac{l}{2} > 0 \exists N: \forall n > N \quad \underbrace{l - \frac{l}{2}}_{= \frac{l}{2} > 0} < a_n < l + \frac{l}{2}$
da cui $\forall n > N \quad a_n > 0$. $\square$

5) CONFRONTO: se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l_2$

e definitivamente $a_n \leq b_n$ allora $l_1 \leq l_2$.

dim. Se per assurdo fosse $l_1 > l_2$ allora

per $\varepsilon = \frac{l_1 - l_2}{2} > 0 \exists N: \forall n > N \quad b_n < l_2 + \varepsilon = l_1 - \varepsilon < a_n$

contro il fatto che definitivamente $a_n \leq b_n$. $\square$

6) DOPPIO CONFRONTO: se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l$

e definitivamente $a_n \leq c_n \leq b_n$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$.

7) Se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ e $\{b_n\}_{n \geq n_0}$ è limitata

allora $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0$.

dim. Dato che $\{b_n\}_{n \geq n_0}$ è limitata

$$\exists M > 0: \forall n \geq n_0 \quad |b_n| \leq M$$

da cui

$$0 \leq |a_n \cdot b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M |a_n| \rightarrow 0$$

e per doppio confronto anche $a_n \cdot b_n \rightarrow 0$. $\square$

8) ALGEBRA DEI LIMITI: se $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l_1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l_2$ con $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$ allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = l_1 \pm l_2 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = l_1 \cdot l_2.$$

Se $l_2 \neq 0$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{l_1}{l_2}.$

9) LIMITI DI UNA SUCCESSIONE MONOTONA:

se $\forall n \geq m_0 \quad a_n \leq a_{n+1}$ (SUCCESSIONE CRESCENTE)

allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{ a_n : n \geq m_0 \}$

se $\forall n \geq m_0 \quad a_n \geq a_{n+1}$ (SUCCESSIONE DECRESCENTE)

allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{ a_n : n \geq m_0 \}.$

10) Per le funzioni elementari $|x|$, x^a , a^x , $\log_a(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{tg}(x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ e $\operatorname{arctg}(x)$ si dimostra che

se $a_n \rightarrow l \in D$ allora $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(l).$
 $\uparrow$
dominio di f

ESEMPI

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \log(\underbrace{e^{-n}}_{\rightarrow 0} + 2 \underbrace{\cos(\frac{1}{n^2+1})}_{\rightarrow 1}) = \log(2)$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\sin(e^n)}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{(e^{\frac{1}{n}} - 1)}_{\rightarrow 0} = 0$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\operatorname{arctg}(n)}_{\text{crescente}} = \sup \{ \operatorname{arctg}(n) : n \in \mathbb{N} \} = \frac{\pi}{2}$$

FORME INDETERMINATE

L'algebra dei limiti si può in parte estendere anche alle successioni divergenti.

SOMMA

	+	$+\infty$	$-\infty$	l
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$	$-\infty$

PRODOTTO

	$\cdot$	$+\infty$	$-\infty$	$l > 0$	0	$l < 0$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$

RECIPROCO

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0 \quad \frac{1}{\underbrace{0^+}_{\substack{\text{tende a } 0 \\ \text{con valori } +}}} = +\infty \quad \frac{1}{\underbrace{0^-}_{\substack{\text{tende a } 0 \\ \text{con valori } -}}} = -\infty$$

I casi "critici" indicati con ? si dicono FORME INDETERMINATE. Non hanno un risultato immediato e vanno indagate con più attenzione.

ESEMPIO

$$\begin{aligned}
 & \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} - 2^{2n+1}}{3^n - 7 \cdot 2^n + (-1)^n} = \frac{+\infty - \infty}{+\infty - \infty + ?} \\
 & = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 \cdot 3^n - 2 \cdot 4^n}{3^n - 7 \cdot 2^n + (-1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(\frac{4}{3}\right)^n}_{+\infty} \cdot \frac{\overbrace{3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n}^{\rightarrow 0} - 2}{\underbrace{1 - 7 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left(-\frac{1}{3}\right)^n}_{\rightarrow 0}} \\
 & = +\infty \cdot \frac{3 \cdot 0 - 2}{1 - 7 \cdot 0 + 0} = -\infty
 \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } |a| < 1 \\ \cancel{?} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$