ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 4

SUP E INF

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

$M \in \mathbb{R}$ si dice MAGGIORANTE di A se
$$\forall a \in A \quad a \leq M.$$

A si dice LIMITATO SUPERIORMENTE se
$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \leq M.$$
A ha almeno un maggiorante

$M \in \mathbb{R}$ si dice MASSIMO di A e si scrive $M = \max(A)$ se
$$\forall a \in A \quad a \leq M \text{ e } M \in A.$$

$m \in \mathbb{R}$ si dice MINORANTE di A se
$$\forall a \in A \quad m \leq a.$$

A si dice LIMITATO INFERIORMENTE se
$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad m \leq a.$$
A ha almeno un minorante

$m \in \mathbb{R}$ si dice MINIMO di A e si scrive $m = \min(A)$ se
$$\forall a \in A \quad m \leq a \text{ e } m \in A.$$

A si dice LIMITATO se
$$\exists M, m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad m \leq a \leq M.$$

ESEMPI

- $A = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

  L'insieme dei maggioranti è vuoto.
  L'insieme dei minoranti è $(-\infty, 0]$.
  A non è limitato $\min(A) = 0$, A non ha massimo.

- $A = (-2, 1) \cup [2, 3]$

  L'insieme dei maggioranti è $[3, +\infty)$
  L'insieme dei minoranti è $(-\infty, -2]$.
  A è limitato. $\max(A) = 3$, A non ha minimo.

$\boxed{\text{ASSIOMA DI COMPLETEZZA}}$ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ con $A \neq \emptyset$.

Se A è limitato superiormente allora l'insieme dei maggioranti di A ha un elemento minimo che si dice ESTREMO SUPERIORE di A e si scrive $\sup(A)$.

Se A è limitato inferiormente allora l'insieme dei minoranti di A ha un elemento massimo che si dice ESTREMO INFERIORE di A e si scrive $\inf(A)$.

La definizione di sup e inf si estende agli insiemi non limitati:

$\sup(A) = +\infty$ se A non è limitato superiormente.

$\inf(A) = -\infty$ se A non è limitato inferiormente.

OSSERVAZIONE

Se A ha un massimo allora $\max(A) = \sup(A)$.

Se A ha un minimo allora $\min(A) = \inf(A)$.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $A = \mathbb{N}$

  $\inf(A) = \min(A) = 0$ e $\sup(A) = +\infty$

- $A = (-2, 1) \cup [2, 3]$

  $\inf(A) = -2$ e $\sup(A) = \max(A) = 3$.

- $A=\left\{ \frac{1}{n} : n\in\mathbb{N}^+ \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$

$\sup(A)=\max(A)=1$. $\inf(A)\overset{?}{=}0$ A non ha minimo.
Verifico che m, il massimo dei minoranti di A è 0.
$m\geq 0$ perché 0 è un minorante di A.
Se per assurdo fosse che $m>0$ allora $\exists n\in\mathbb{N}^+$ tale che $m>\frac{1}{n}$ e quindi $m>\frac{1}{n}\in A$ ossia m non è un minorante di A. Contraddizione.
Così $m=0$.

- $A=\{x\in\mathbb{Q} : x^2\leq 2\} = [-\sqrt{2},\sqrt{2}]\cap\mathbb{Q}$

$\left.\begin{array}{l} \inf(A)=-\sqrt{2},\ \text{A non ha minimo} \\ \sup(A)=\sqrt{2},\ \text{A non ha massimo} \end{array}\right\} \pm\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

- $A=\left\{ x\in\mathbb{R} : x-2<\left|\frac{x}{x-1}\right| \right\}$

Il segno di $\frac{x}{x-1}$ è  e quindi

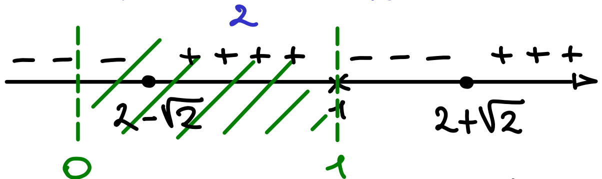
$\begin{cases} x\leq 0 \vee x>1 \\ x-2<\frac{x}{x-1} \end{cases} \cup \begin{cases} 0<x<1 \\ x-2<-\frac{x}{x-1} = \underbrace{\frac{x}{1-x}}_{>0} \end{cases}$

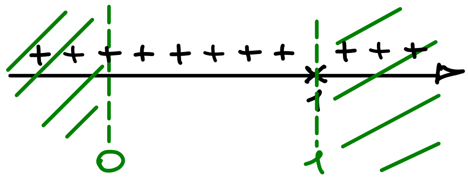
$x-2-\frac{x}{x-1}=\frac{x^2-4x+2}{x-1}<0$

$(1-x)(x-2)<x$

$x^2-2x+2>0 \quad \Delta=4-8<0$

$x_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$





$x\in(-\infty,0]\cup(1,2+\sqrt{2})$ $\qquad$ $x\in(0,1)$

Quindi $A=(-\infty,1)\cup(1,2+\sqrt{2})$ e

$\inf(A)=-\infty \quad \sup(A)=2+\sqrt{2}$

A non ha né massimo né minimo.

PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DEL SUP

$$\sup(A) = +\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists a \in A : M < a$$

dato un qualunque numero reale M
esiste un elemento di A più grande di M

$$\sup(A) = l \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall a \in A \ \ a \leq l & \text{l è un maggiorante} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : \ l - \varepsilon < a \end{cases}$$

ogni numero più piccolo di l
non è un maggiorante di A

PROPRIETÀ CARATTERISTICHE DELL'INF

$$\inf(A) = -\infty \iff \forall M \in \mathbb{R} \ \exists a \in A : a < M$$

dato un qualunque numero reale M
esiste un elemento di A più piccolo di M

$$\inf(A) = l \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall a \in A \ \ l \leq a & \text{l è un minorante} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : \ a < l + \varepsilon \end{cases}$$

ogni numero più grande di l
non è un minorante di A

OSSERVAZIONE

Vale la seguente disuguaglianza

$$\forall a, b \geq 0 \qquad \underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\substack{\text{media} \\ \text{aritmetica}}} \geq \underbrace{\sqrt{a \cdot b}}_{\substack{\text{media} \\ \text{geometrica}}} \qquad (AG)$$

infatti $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \iff a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$

$\iff a + b \geq 2\sqrt{ab}$.

L'uguaglianza vale solo se $a = b$.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- Determinare sup/inf/max/min di
$$A=\left\{x+\frac{5}{x} : x\in\mathbb{R}^+\right\}. \qquad \mathbb{R}^+=(0,+\infty)$$
Notiamo che $\forall M>0$, $M< M+\underbrace{\left(\frac{5}{M}\right)}_{>0}\in A$
e quindi $\sup(A)=+\infty$. A non ha massimo.
Inoltre
$$\forall x>0 \quad x+\frac{5}{x}\overset{AG}{\geq} 2\sqrt{x\cdot\frac{5}{x}}=2\sqrt{5} \text{ e vale l'= se } x=\sqrt{5}$$
Quindi $2\sqrt{5}$ è un minorante e appartiene ad A.
Così $\inf(A)=\min(A)=2\sqrt{5}$ irrazionale $\in(4,5)$.

- Determinare sup/inf/max/min di
$$A=\left\{n+\frac{5}{n} : n\in\mathbb{N}^+\right\}.$$
Si ha che $\forall M>0$ $M<n+\frac{5}{n}\in A$ con n intero $>M$
e quindi $\sup(A)=+\infty$. A non ha massimo.
Come prima
$$\forall n\in\mathbb{N}^+ \quad n+\frac{5}{n}\overset{AG}{\geq} 2\sqrt{n\cdot\frac{5}{n}}=2\sqrt{5}\notin\mathbb{Q}$$
$2\sqrt{5}$ è un minorante ma $2\sqrt{5}\notin A\subseteq\mathbb{Q}$.
$2\sqrt{5}$ è il più grande dei minoranti? NO!
$$A=\left\{\overset{1}{6}, \overset{2}{\boxed{\frac{9}{2}}}, \overset{3}{\frac{14}{3}}, \overset{4}{\frac{21}{4}}, \overset{5}{6}, \dots\right\}$$
$\frac{9}{2}\in A$ ed è minore di $6, \frac{14}{3}, \frac{21}{4}$ inoltre
$$\forall n\geq 5 \quad \underbrace{n}_{\geq 5}+\underbrace{\frac{5}{n}}_{>0}>5>\frac{9}{2}.$$
Così $\inf(A)=\min(A)=\frac{9}{2}$.

• Determinare sup/inf/max/min di

$$A=\left\{\frac{2n-1}{n+1} : n\in\mathbb{N}\right\}=\left\{\overset{0}{-1},\overset{1}{\frac{1}{2}},\overset{2}{1},\overset{3}{\frac{5}{4}},\dots\right\}.$$

$\min(A)=\inf(A)=-1$? SÌ

$-1\in A$ e $\forall n\geq 1$ $\frac{2n-1}{n+1}>0>-1$.

$\sup(A)$? Esiste $\max(A)$?

Verifichiamo che 2 è un maggiorante di A

$$\underbrace{\frac{2n-1}{n+1}}_{>0}\overset{?}{\leq}2 \iff 2n-1\leq 2n+2 \iff -1\leq 2 \text{ VERO}$$

Inoltre non vale mai l'= e $2\notin A$.

Verifichiamo che 2 è il più piccolo dei maggioranti di A:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists a\in A : 2-\varepsilon<a$$

ossia

$$\forall\varepsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N} : 2-\frac{2n-1}{n+1}<\varepsilon.$$

Osserviamo che

$$2-\frac{2n-1}{n+1}=\frac{\cancel{2n}+2-\cancel{2n}+1}{n+1}<\frac{3}{n+1}\overset{?}{<}\varepsilon \text{ vale se } \frac{3}{\varepsilon}-1<n$$

e quindi basta prendere un intero n maggiore di $\frac{3}{\varepsilon}-1$ (esiste perché $\sup(\mathbb{N})=+\infty$).

Possiamo così concludere che

$\sup(A)=2$ e A non ha massimo.