

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 3

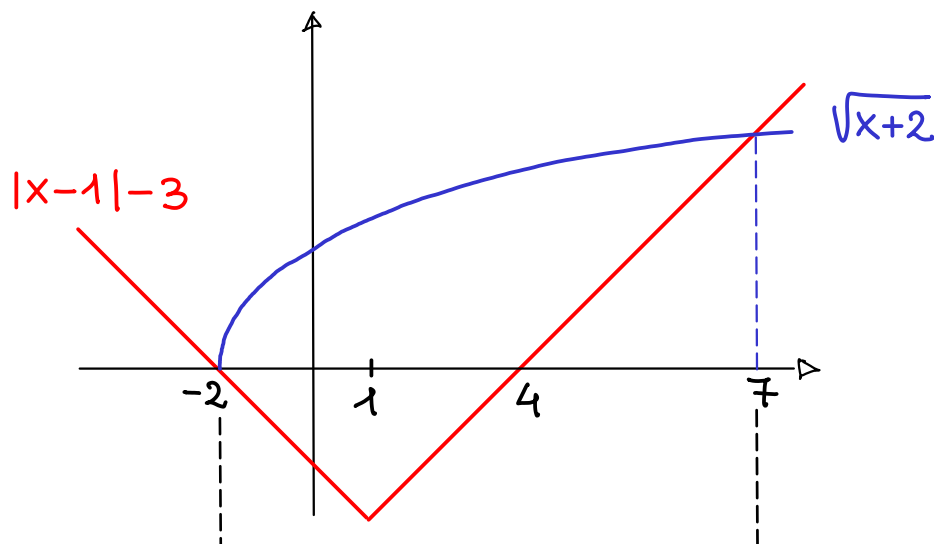
ESEMPIO Risolvere $|x-1|-3 \leq \sqrt{x+2}$.

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x < 1 \\ 1-x-3 \leq \sqrt{x+2} \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \\ x-1-3 \leq \sqrt{x+2} \end{array} \right. \\
 & \left\{ \begin{array}{l} -2 \leq x < 1 \\ -2-x \leq \sqrt{x+2} \\ \underbrace{-2-x}_{\leq 0} \leq \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\geq 0} \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq x \leq 4 \\ x-4 \leq \sqrt{x+2} \\ \underbrace{x-4}_{\leq 0} \leq \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\geq 0} \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} 4 < x \\ x-4 \leq \sqrt{x+2} \\ \underbrace{x-4}_{\geq 0} \leq \underbrace{\sqrt{x+2}}_{\geq 0} \end{array} \right. \\
 & \quad x \in [-2, 1) \quad \quad \quad x \in [1, 4] \quad \quad \quad \begin{array}{l} \Downarrow (\)^2 \\ \left\{ \begin{array}{l} 4 < x \\ (x-4)^2 \leq x+2 \end{array} \right. \\ x \in (4, 7] \end{array} \\
 & (x-4)^2 \leq x+2 \\
 & x^2 - 8x + 16 - x - 2 \leq 0 \\
 & x^2 - 9x + 14 \leq 0 \\
 & (x-2)(x-7) \leq 0 \quad x \in [2, 7]
 \end{aligned}$$

Quindi l'insieme delle soluzioni è

$$[-2, 1) \cup [1, 4] \cup (4, 7] = [-2, 7].$$

Interpretazione grafica delle disuguaglianza:



ESEMPIO Disegnare il grafico di $\arcsin(\sin(x))$ nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Dato che $\arcsin(x)$ è l'inversa di $\sin(x)$ ristretta a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, abbiamo che

1) Se $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ allora $\arcsin(\sin(x)) = x$

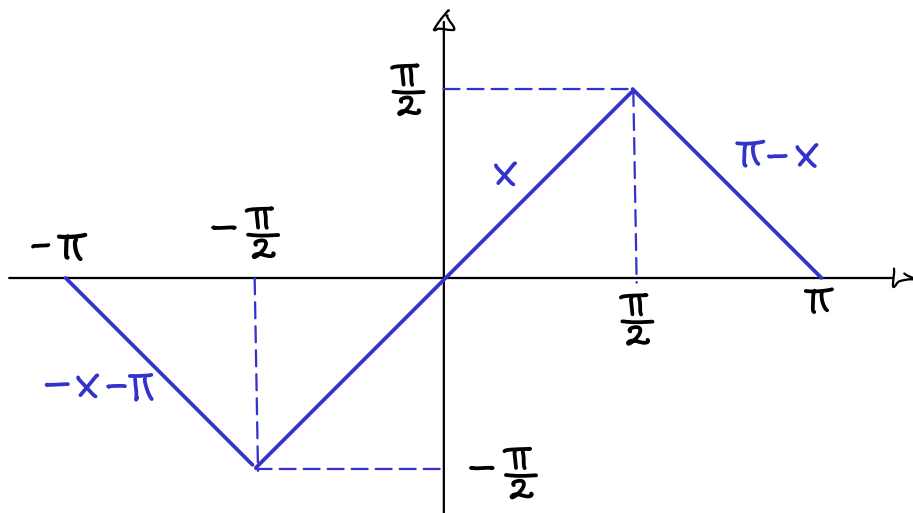
2) Se $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ allora $\in [0, \frac{\pi}{2})$
 $\arcsin(\sin(x)) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$

3) Se $x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2})$ allora $\in (\frac{\pi}{2}, \pi]$

$$\arcsin(\sin(x)) = -\arcsin(\sin(-x)) = -(\pi - (-x))$$
$$= -x - \pi$$

Cosi

$$\text{arcsin}(\sin(x)) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x & \text{se } x \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \\ -x - \pi & \text{se } x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}) \end{cases}$$



$f(x) = \arcsin(\sin(x))$ è periodica con periodo $T = 2\pi$.

f è dispari: $\forall x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \arcsin(\sin(-x)) = \arcsin(-\sin(x)) = -\arcsin(\sin(x)) = -f(x)$$

ESEMPIO Determinare il dominio di

$$f(x) = \sqrt{\log\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)} \quad \text{la base di } \log \text{ è } e$$

e $f(D) = \{ f(x) : x \in D \}$. immagine di f

La funzione $f: D \rightarrow f(D)$ è biunivoca?

Nel caso trovare f^{-1} .

Per individuare D dobbiamo imporre che tutti gli argomenti delle funzioni elementari utilizzate stiano nei rispettivi domini.

$$\begin{cases} x+1 \neq 0 & \text{denominatore} \neq 0 \\ \frac{2x+1}{x+1} > 0 & \text{argomento del logaritmo} > 0 \\ \log\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) \geq 0 & \text{argomento della radice quadrata} \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{2x+1}{x+1} \geq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq -1 \\ \frac{2x+1 - x - 1}{x+1} \geq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{c} +++ \quad \text{---} \quad +++ \\ -1 \quad 0 \end{array}$$

e dunque $D = (-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$.

Per $y \in \mathbb{R}$ risolviamo l'equazione $y = \sqrt{\log\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)}$ rispetto a x : $y \geq 0$ e inoltre

$$y^2 = \log\left(\frac{2x+1}{x+1}\right), \quad e^{y^2} = \frac{2x+1}{x+1}, \quad e^{y^2}x + e^{y^2} = 2x+1$$

$\uparrow$
 $y \geq 0$

$$(e^{y^2} - 2)x = 1 - e^{y^2}, \quad x = \frac{1 - e^{y^2}}{e^{y^2} - 2} \quad \text{soluzione unica}$$

$y \neq \sqrt{\log(2)}$
 $\downarrow$

Con $y \in [0, \sqrt{\log(2)}) \cup (\sqrt{\log(2)}, +\infty) = f(D)$

l'equazione $y = f(x)$ ha un'unica soluzione.

$f: D \rightarrow f(D)$ è biunivoca e $f^{-1}(x) = \frac{1 - e^{x^2}}{e^{x^2} - 2}$.

PRINCIPIO DI INDUZIONE

Dato $m_0 \in \mathbb{N}$ e $\forall m \in \mathbb{N}$ con $m \geq m_0$ sia $P(m)$ una proposizione che può essere vera o falso al variare di m .

TEOREMA (PRINCIPIO DI INDUZIONE) Se

- 1) $P(m_0)$ è vera (PASSO BASE)
- 2) $\forall m \geq m_0$ $\underbrace{P(m)}_{\text{ipotesi induttiva}} \Rightarrow P(m+1)$ (PASSO INDUTTIVO)

allora $P(m)$ è vera $\forall m \geq m_0$.

ESEMPIO $\forall m \geq 1$ $1+2+\dots+m = \sum_{k=1}^m k = \frac{m(m+1)}{2}$ $P(m)$

Verifica per induzione.

Passo base. Per $m=1$, $\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ VERO

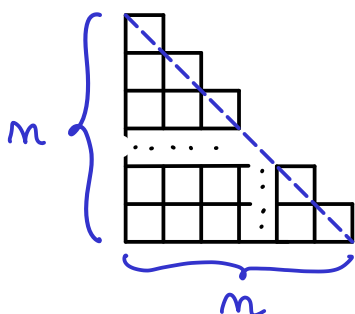
Passo induttivo. Per $m \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{m+1} k \stackrel{?}{=} \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad P(m+1)$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{m+1} k &= \sum_{k=1}^m k + (m+1) \stackrel{P(m)}{=} \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = (m+1) \left(\frac{m}{2} + 1 \right) \\ &= \frac{(m+1)(m+2)}{2} \quad \text{VERO} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE.



Interpretazione geometrica

$$\sum_{k=1}^m k = \frac{m \cdot m}{2} + m \cdot \frac{1}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$$



ESEMPIO $\forall m \geq 4 \quad 2^m > m+10$.

Verifica per induzione.

Paso base. Per $m=4$, $2^4 = 16 \stackrel{?}{>} 14 = 4+10$ VERO

Paso induttivo. Per $m \geq 4$,

$$2^{m+1} \stackrel{?}{>} (m+1)+10 \quad P(m+1)$$

Abbiamo che

$$2^{m+1} = 2 \cdot 2^m \stackrel{P(m)}{>} 2(m+10) = 2m+20 > m+11 \quad \text{VERO}$$

TEOREMA (DISUGUAGLIANZA DI BERNOULLI)

$$\forall m \in \mathbb{N}^+, \forall x \geq -1 \quad (1+x)^m \geq 1+mx.$$

dim. Per induzione rispetto a m .

Paso base. Per $m=1$, $(1+x)^1 \stackrel{?}{\geq} 1+1 \cdot x$ VERO

Paso induttivo. Per $m \geq 1$

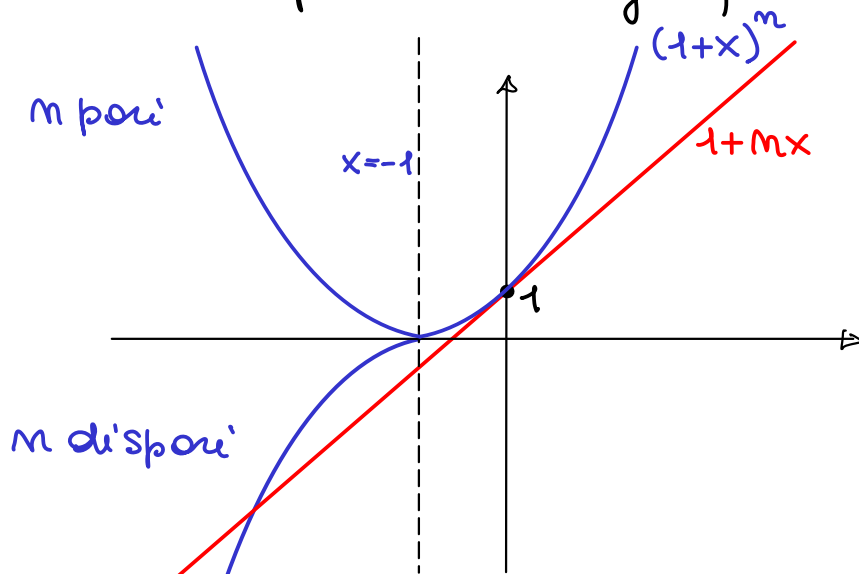
$$(1+x)^{m+1} \stackrel{?}{\geq} 1+(m+1) \cdot x \quad P(m+1)$$

Abbiamo che

$$(1+x)^{m+1} = \underbrace{(1+x)^1}_{\substack{\geq 0 \\ \uparrow \\ x \geq -1}} \cdot (1+x)^m \stackrel{P(m)}{\geq} (1+x)(1+mx) \stackrel{?}{\geq} 1+(m+1)x \quad \text{VERO}$$
$$\begin{aligned} &= 1 + \underbrace{x + mx}_{(m+1)x} + \underbrace{mx^2}_{\geq 0} \\ &= 1 + (m+1)x + mx^2 \end{aligned}$$

□

OSSERVAZIONE Interpretazione grafica



Sia $m \in \mathbb{N}$. Allora

$$m! = \begin{cases} 1 & \text{se } m=0 \\ m \cdot (m-1) \cdots 1 & \text{se } m \geq 1 \end{cases}$$

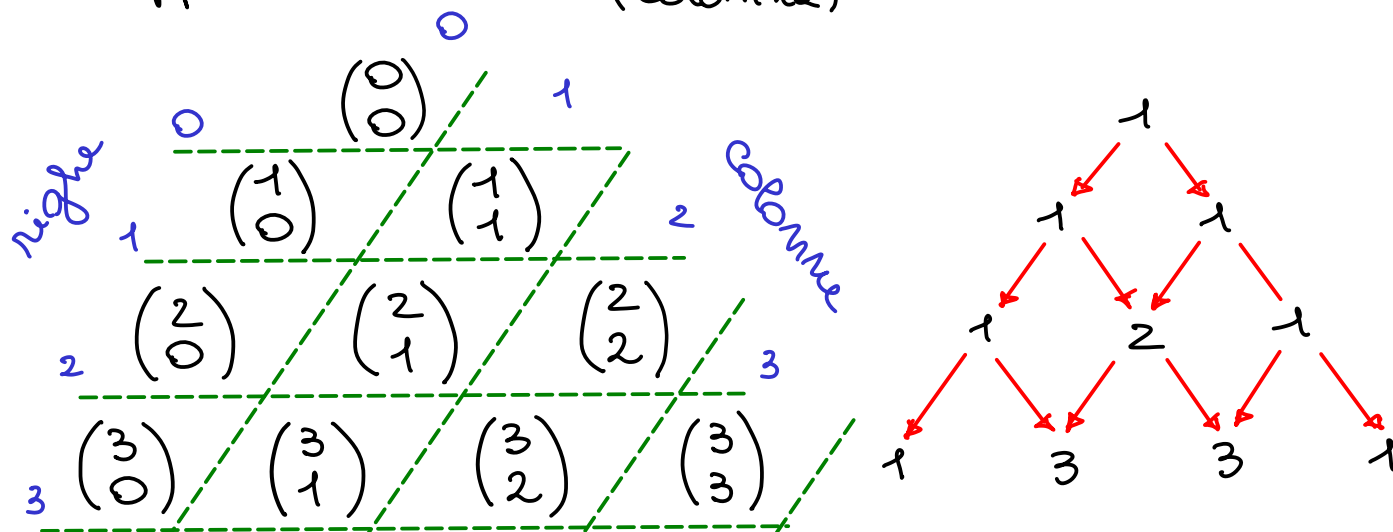
indica il FATTORIALE di m .

Per k intero tale che $0 \leq k \leq m$

$$\binom{m}{k} = \frac{m!}{k! (m-k)!} = \frac{\overset{k \text{ fattori}}{m(m-1) \cdots (m-k+1)}}{k!}$$

indica il COEFFICIENTE BINOMIALE m su k .

Rappresentazione (riga
colonne)



Esempio di calcolo

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3}!}{\cancel{3!} \cdot \cancel{2}} = 10.$$

Proprietà:

$$1) \binom{m}{k} = \frac{m!}{k! (m-k)!} = \frac{m!}{(m-k)! k!} = \binom{m}{m-k}$$

$$2) \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} = \frac{m!}{(k-1)! (m-k+1)!} + \frac{m!}{k! (m-k)!}$$

$$= \frac{m!}{k! (m-k+1)!} (k + (m-k+1)) = \binom{m+1}{k}$$

TEOREMA (POTENZA DI UN BINOMIO)

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall m \in \mathbb{N}^+ (a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$$

dim. Per induzione.

Paso base. Per $m=1$, $(a+b)^1 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} a^k b^{1-k} = 1 \cdot a^0 b^1 + 1 \cdot a^1 b^0$

Paso induttivo. Per $m \geq 1$,

VERO

$$(a+b)^{m+1} = (a+b) \cdot (a+b)^m \stackrel{P(m)}{=} (a+b) \cdot \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{k+1} b^{m-k} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k}$$

$k = k+1$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} a^k b^{m+1-k} + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m+1-k}$$

$$= a^{m+1} + \sum_{k=1}^m \underbrace{\left(\binom{m}{k-1} + \binom{m}{k} \right)}_{\binom{m+1}{k}} a^k b^{m+1-k} + b^{m+1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} a^k b^{m+1-k}$$

$P(m+1)$ è VERA!

□

ESEMPIO

 Per $m=4$:

$$\begin{aligned} (a+b)^4 &= \binom{4}{0} a^0 b^4 + \binom{4}{1} a^1 b^3 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^3 b^1 + \binom{4}{4} a^4 b^0 \\ &= b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & & 1 & 1 & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$