

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 2

INTRODUZIONE ALLE FUNZIONI

Una FUNZIONE f da un insieme A ad un insieme B è una corrispondenza che ad ogni $x \in A$ associa $f(x) \in B$:

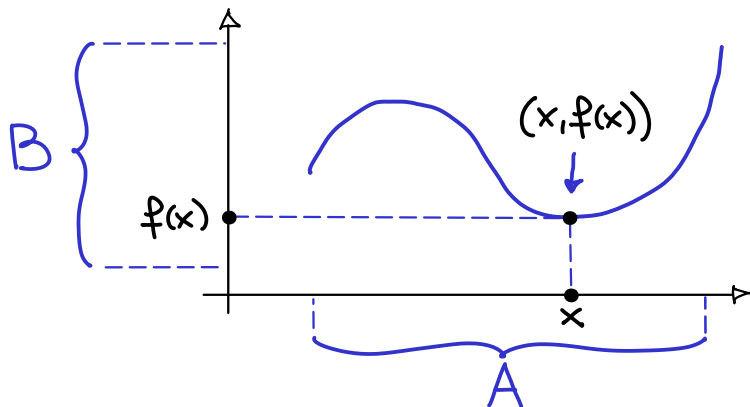
$$f: A \rightarrow B$$

Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ allora f si dice DI VARIABILE REALE A VALORI REALI. Il GRAFICO di f è l'insieme

$$\{(x, f(x)) : x \in A\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

↑ prodotto
Cartesiano

con rappresentazione "grafica".



Notazioni e definizioni.

- f si dice INIETTIVA in A se

$$\forall x_1, x_2 \in A \quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

- f si dice SURIETTIVA su B se

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A : y = f(x).$$

- f si dice BIUNIVOCA da A a B

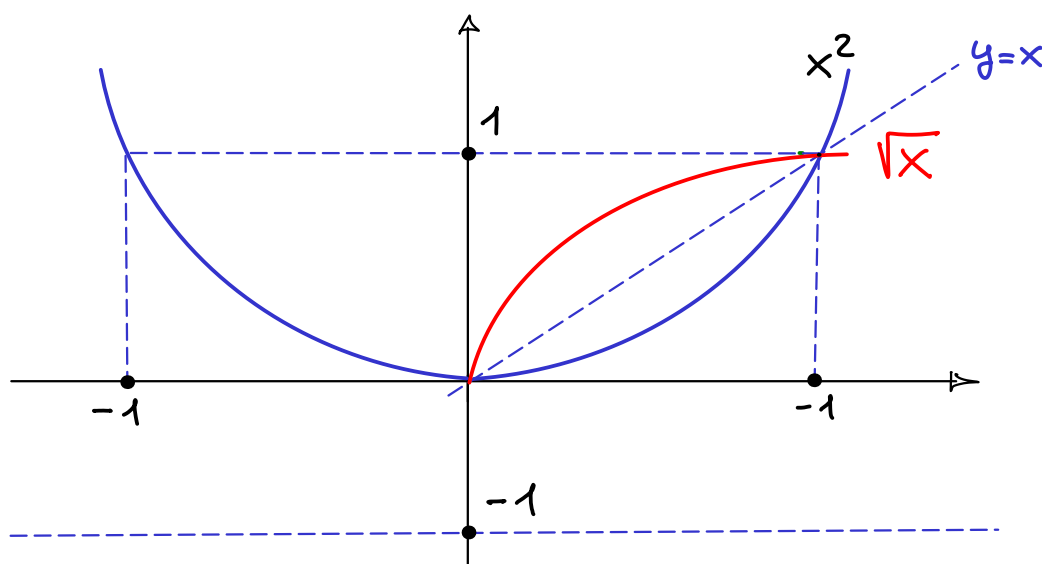
$$\forall y \in B \quad \exists! x \in A : y = f(x).$$

ESISTE ED
È UNICO

f è iniettiva
e suriettiva

- Se $f: A \rightarrow B$ è biunivoca allora si dice INVERTIBILE e esiste una funzione detta INVERSA $f^{-1}: B \rightarrow A$ tale che
 $\forall x \in A \quad f^{-1}(f(x)) = x$ e $\forall y \in B \quad f(f^{-1}(y)) = y$.

ESEMPIO Consideriamo $f(x) = x^2$



- 1) Se $A = \mathbb{R}$ e $B = \mathbb{R}$ allora
 f non è iniettiva perché $(-1)^2 = (1)^2 = 1$,
 f non è suriettiva perché l'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzioni reali.
- 2) Se $A = \mathbb{R}$ e $B = [0, +\infty)$ allora
 f non è iniettiva perché $(-1)^2 = (1)^2 = 1$,
 f è suriettiva perché $\forall b \in B$ l'equazione $x^2 = b$ ha almeno una soluzione reale:
 0 se $b = 0$ e $\pm\sqrt{b}$ se $b > 0$.
- 3) Se $A = B = [0, +\infty)$ allora f è biunivoca
e la funzione inversa è $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

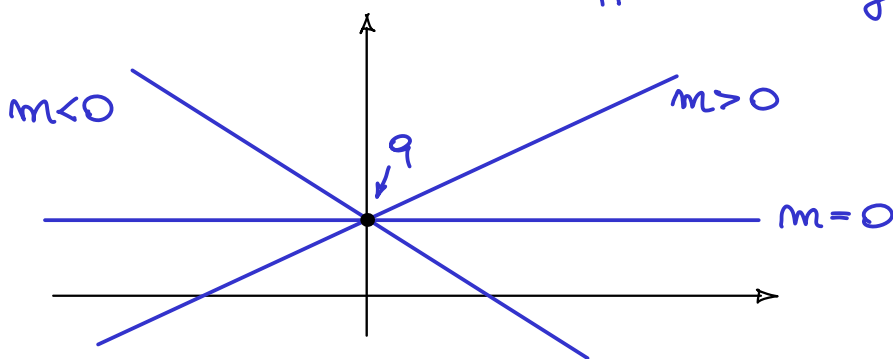
↖ dominio di definizione
Sia $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ con $D \subseteq \mathbb{R}$.

- f è (STRETTAMENTE) CRESCENTE in $A \subseteq D$ se
 $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow \underset{(<)}{f(x_1) \leq f(x_2)}.$
- f è (STRETTAMENTE) DECRESCENTE in $A \subseteq D$ se
 $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow \underset{(>)}{f(x_1) \geq f(x_2)}.$
- f è PARI se $\forall x \in D \quad -x \in D$ e $f(x) = f(-x).$
- f è DISPARI se $\forall x \in D \quad -x \in D$ e $f(x) = -f(-x).$
- f è PERIODICA se $\exists T > 0$ detto PERIODO tale che
 $\forall x \in D$ e $\forall k \in \mathbb{Z} \quad x + kT \in D$ e $f(x) = f(x + kT).$

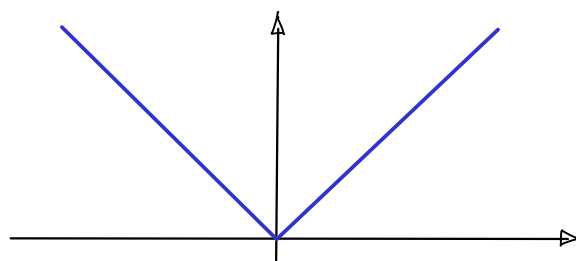
FUNZIONI ELEMENTARI

- FUNZIONE RETTA: $f(x) = mx + q$ con $m, q \in \mathbb{R}$
 $D = \mathbb{R}$

↖ coefficiente angolare

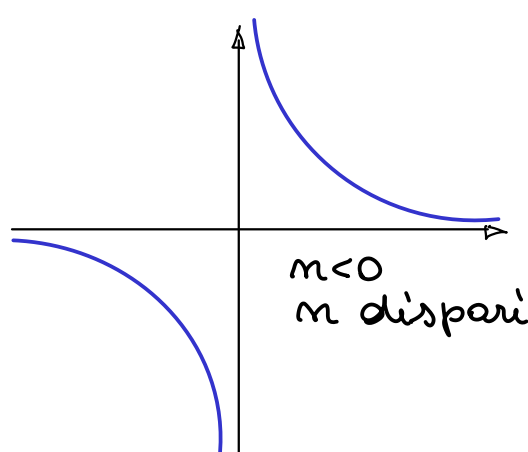
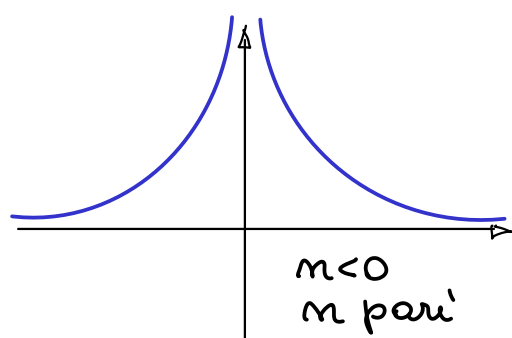
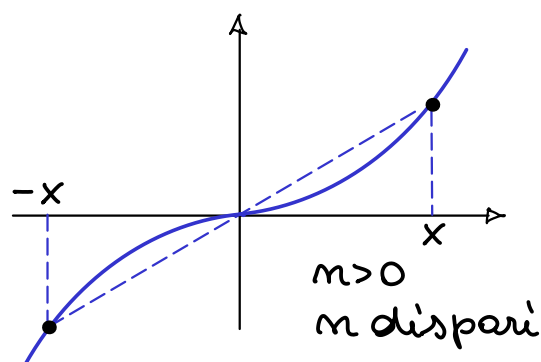
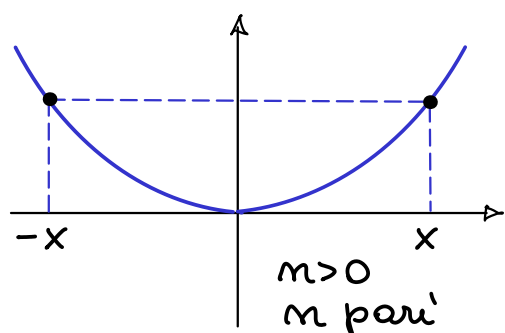


- FUNZIONE VALORE ASSOLUTO: $f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$
 $D = \mathbb{R}$

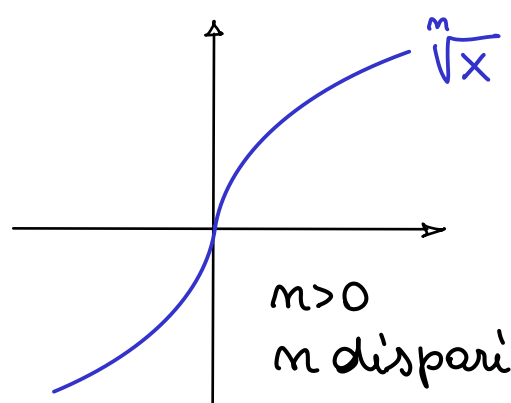
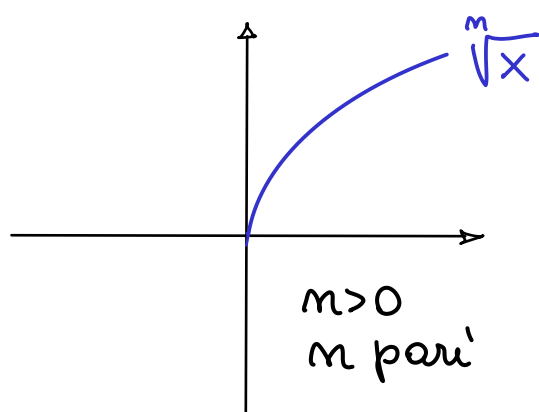


$|x|$ è pari

- FUNZIONE POTENZA INTERA: $f(x) = x^m$ con $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
 $D = \mathbb{R}$ se $m > 0$ e $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ se $m < 0$



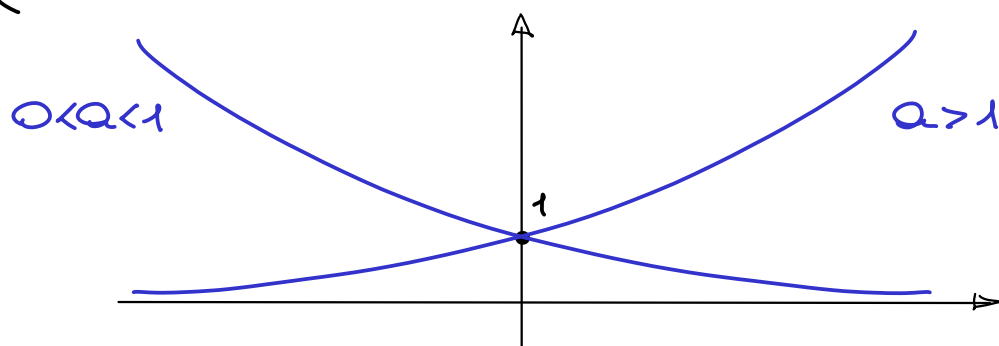
- FUNZIONE RADICE m-SIMA: $f(x) = \sqrt[m]{x} = x^{1/m}$ con $m \in \mathbb{N}^+$
 $D = [0, +\infty)$ se m è pari, $D = \mathbb{R}$ se m è dispari



OSSERVAZIONI

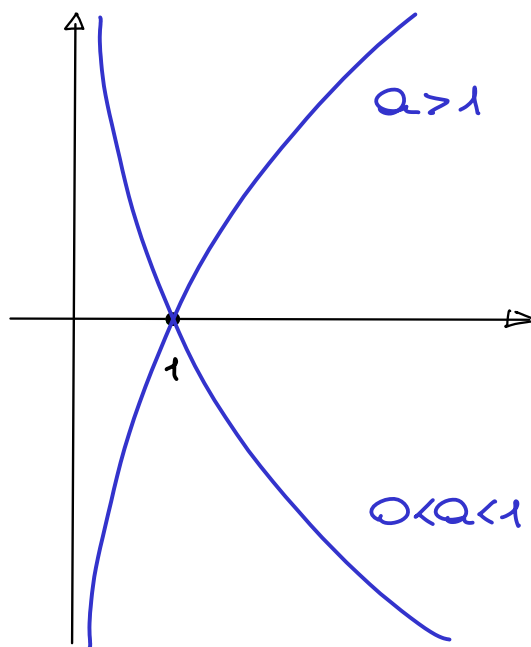
- 1) Se m è pari: $\forall x \geq 0 \ (\sqrt[m]{x})^m = x$ e $\forall x \in \mathbb{R} \ \sqrt[m]{x^m} = |x|$
- 2) Se m è dispari: $\forall x \in \mathbb{R} \ (\sqrt[m]{x})^m = \sqrt[m]{x^m} = x$

- FUNZIONE ESPONENZIALE: $f(x) = a^x$ con $a > 0$ e $a \neq 1$
 $D = \mathbb{R}$



Proprietà: $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2} \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

- FUNZIONE LOGARITMO: $f(x) = \log_a(x)$ con $a > 0$ e $a \neq 1$
 $D = (0, +\infty)$



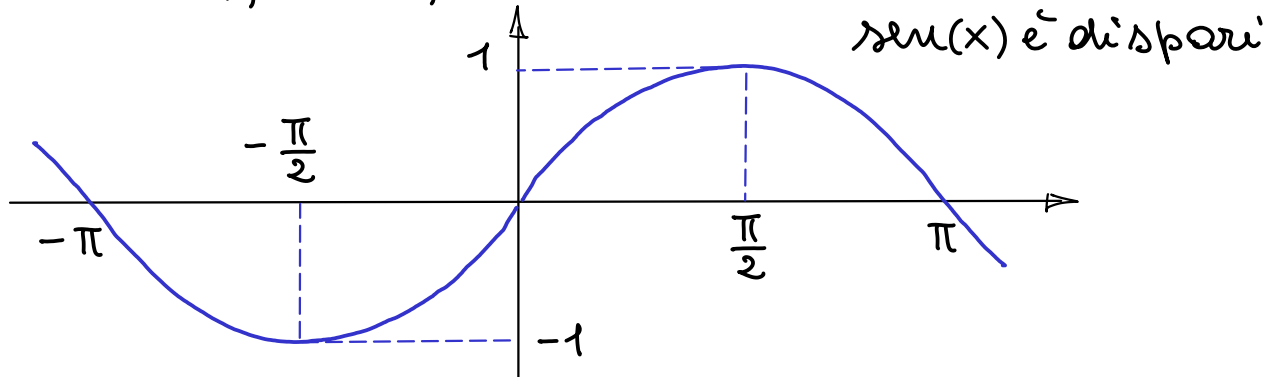
Proprietà: $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2) \quad \forall x_1, x_2 > 0$
 $\log_a(x^\alpha) = \alpha \log_a(x) \quad \forall x > 0$

OSSERVAZIONE a^x e $\log_a(x)$ sono inverse dell'altra

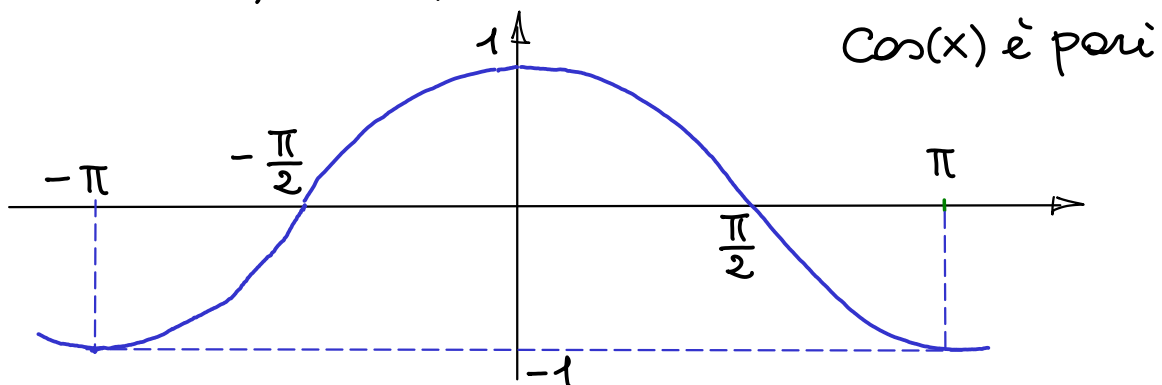
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \log(a^x) = x$ e $\forall x > 0 \quad a^{\log_a(x)} = x$.

- FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

$$f(x) = \sin(x), D = \mathbb{R}, T = 2\pi$$



$$f(x) = \cos(x), D = \mathbb{R}, T = 2\pi$$

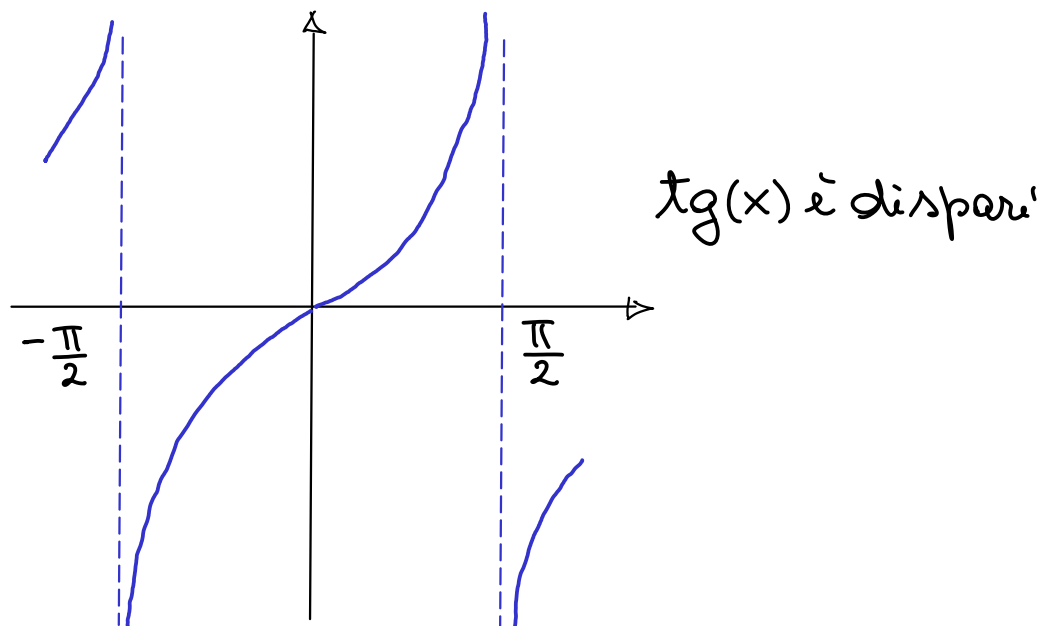


Proprietà: $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\cos(x_1 + x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) - \sin(x_1)\sin(x_2)$$

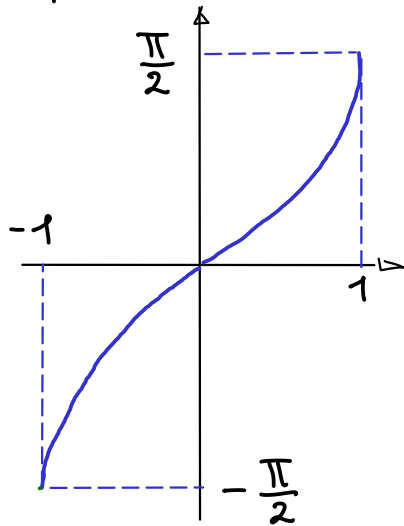
$$\sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) + \cos(x_1)\sin(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}, T = \pi$$



• FUNZIONI TRIGONOMETRICHE INVERSE

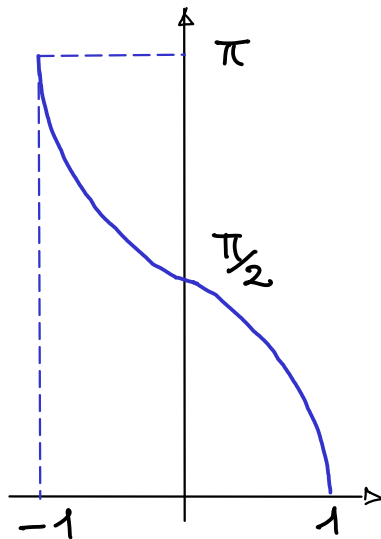
$$f(x) = \arcsin(x), D = [-1, 1]$$



$\arcsin(x)$ è l'inversa
della funzione biunivoca
 $\sin(x): [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$

$\arcsin(x)$ non è periodica
 $\arcsin(x)$ è dispari

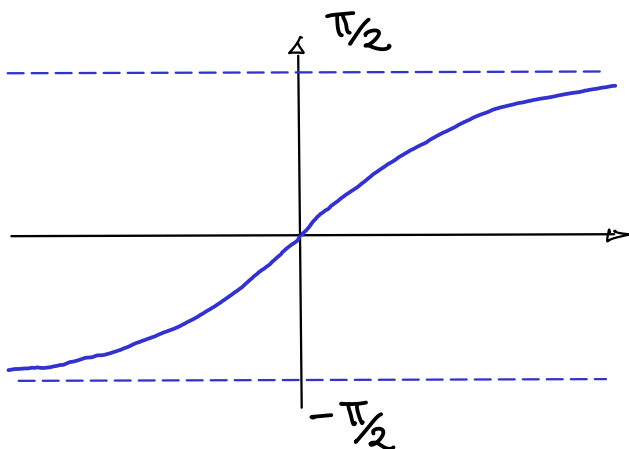
$$f(x) = \arccos(x), D = [-1, 1]$$



$\arccos(x)$ è l'inversa
della funzione biunivoca
 $\cos(x): [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$

$\arccos(x)$ non è periodica

$$f(x) = \arctg(x), D = \mathbb{R}$$

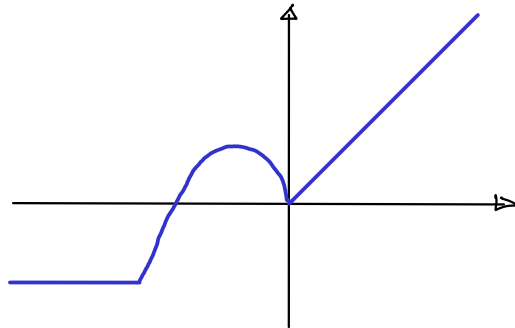


$\arctg(x)$ è l'inversa
della funzione biunivoca
 $\tg(x): (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$

$\arctg(x)$ non è periodica
 $\arctg(x)$ è dispari

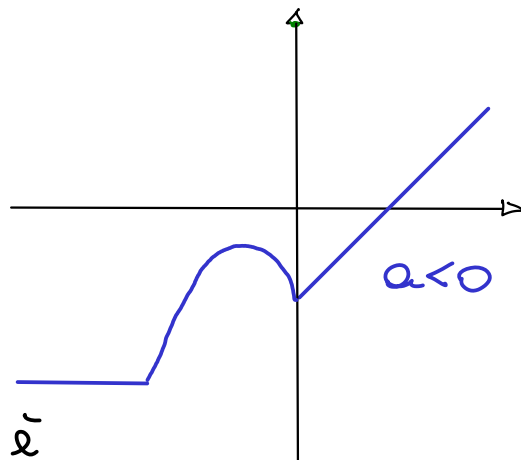
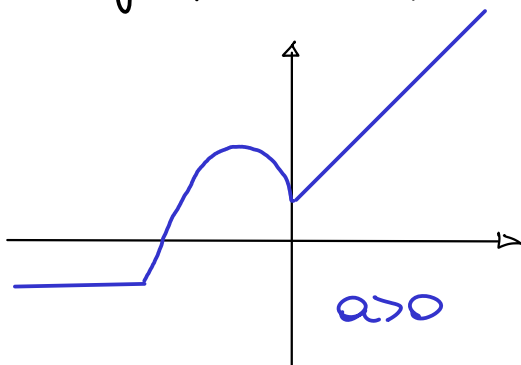
OPERAZIONI SUI GRAFICI

Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione con grafico

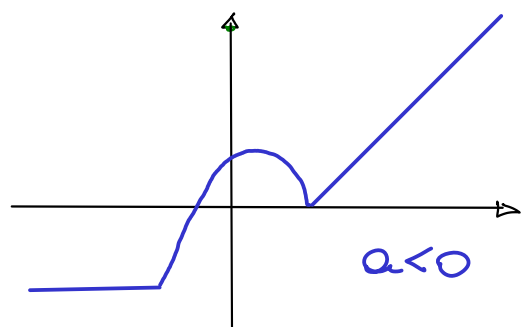
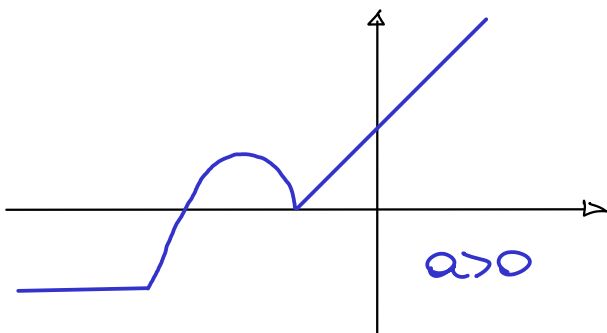


allora

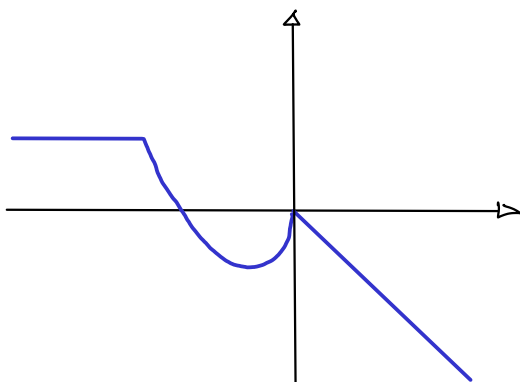
1) il grafico di $f(x)+a$ è



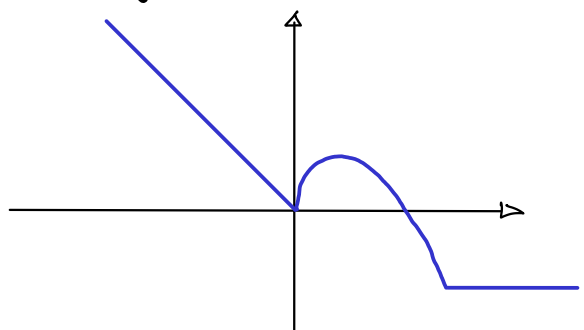
2) il grafico di $f(x+a)$ è



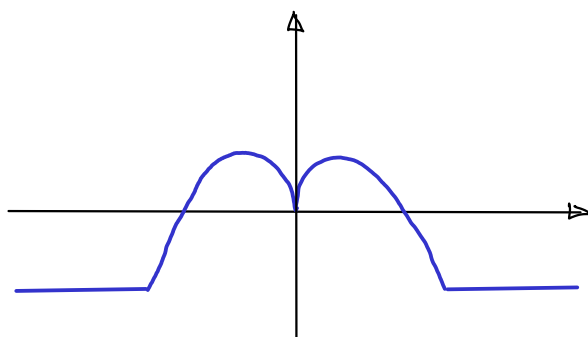
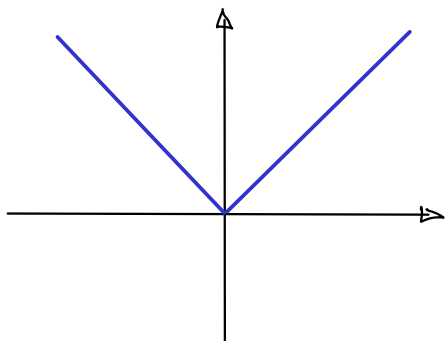
3) il grafico di $-f(x)$ è



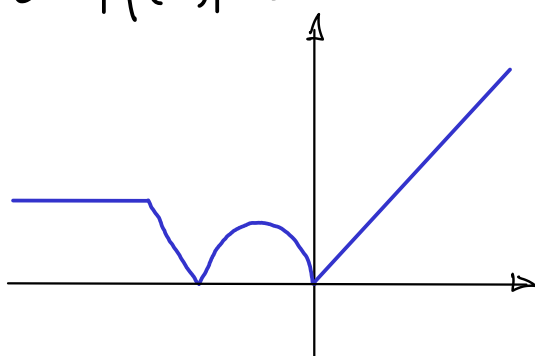
4) il grafico di $f(-x)$ è



5) il grafico di $f(|x|)$ è 6) il grafico di $f(-|x|)$ è



7) il grafico di $|f(x)|$ è



ESEMPIO Disegnare il grafico della funzione
 $f(x) = ||x-2|-1|$.

