

ANALISI MATEMATICA - LEZIONE 1

INSIEMI NUMERICI

NUMERI NATURALI: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

NUMERI INTERI: $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$

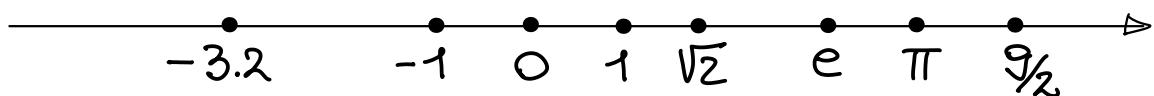
NUMERI RAZIONALI: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z} \text{ e } n \neq 0 \right\}$
TALE CHE

NUMERI REALI:

$\mathbb{R} = \left\{ \underbrace{m.c_1c_2c_3c_4\dots}_{\text{rappresentazione decimale}} : m \in \mathbb{Z}, c_i \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \forall i \geq 1 \right\}$
PER OGNI
 $\rightarrow m + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \frac{c_3}{10^3} + \frac{c_4}{10^4} + \dots$

OSSERVAZIONI

- $\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$
- I numeri reali sono in corrispondenza biunivoca con i punti di una retta orientata



Inoltre

$$1.25 = \frac{125}{100} = \frac{5}{4} \in \mathbb{Q}$$

$$1.252525\dots = 1.\overbrace{25}^{\text{periodo}} = 1 + \frac{25}{10^2} + \frac{25}{10^4} + \dots = \frac{124}{99} \in \mathbb{Q}$$

Se $0.\overline{25} = x$ allora

$$100x = 25.25 = 25 + x \Rightarrow 99x = 25 \Rightarrow x = \frac{25}{99}$$

Esistono numeri reali non razionali?

TEOREMA $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\sqrt{2}$ è un numero reale positivo tale che il suo quadrato vale 2

dim. Supponiamo per assurdo che $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Allora $\exists m \in \mathbb{N}^+$ e $\exists n \in \mathbb{N}^+$ tali che $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$.

↑ ESISTE

↑ NATURALI POSITIVI

Quindi $\sqrt{2}m = n$ e elevando al quadrato si ha
intero con un numero DISPARI di fattori 2 $\rightarrow 2m^2 = n^2 \leftarrow$ intero con un numero PARI di fattori 2

Il fatto che il numero di fattori 2 a destra e a sinistra siano diversi contraddice l'unicità della fattorizzazione di un intero in fattori primi. Così l'ipotesi di potenza $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ deve essere falsa e $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

OSSERVAZIONE: la rappresentazione decimale di $\sqrt{2}$ è illimitata e NON periodica

$$\sqrt{2} = 1.4142135\dots$$

Questa proprietà vale per tutti i

$$\text{NUMERI IRRAZIONALI} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

sottrazione insiemistica

Si dimostra che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono insiemi DENSI in $\mathbb{R}$ ossia

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ con } a < b \left\{ \begin{array}{l} \exists q \in \mathbb{Q} : a < q < b \\ \exists r \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : a < r < b \end{array} \right.$$

PROPRIETÀ DI $\mathbb{R}$

$\mathbb{R}$ è un CAMPO: ci sono due operazioni, SOMMA e PRODOTTO tali che:

- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad \left. \begin{array}{l} (a+b)+c = a+(b+c) \\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \end{array} \right\} \text{P. ASSOCIATIVA}$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \left. \begin{array}{l} a+b = b+a \\ a \cdot b = b \cdot a \end{array} \right\} \text{P. COMMUTATIVA}$
- $\forall a \in \mathbb{R} \quad \left. \begin{array}{l} a+0 = a \\ a \cdot 1 = a \end{array} \right\} \text{ESISTENZA DELL'ELEMENTO NEUTRO}$
- $\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists b \in \mathbb{R} : a+b=0 \quad b=-a \quad \text{ESISTENZA DELL'OPPOSTO}$
- $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \exists b \in \mathbb{R} : a \cdot b=1 \quad b=\frac{1}{a} \quad \text{ESISTENZA DEL RECIPROCO}$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{P. DISTRIBUTIVA}$

In $\mathbb{R}$ c'è una RELAZIONE D'ORDINE $\leq$ tale che:

- $\forall a \in \mathbb{R} \quad a \leq a$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq b \text{ oppure } b \leq a$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \quad a \leq b \text{ e } b \leq a \xRightarrow{\text{IMPLICA}} a=b$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \leq b \text{ e } b \leq c \Rightarrow a \leq c$
- $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \quad a \leq b \xLeftrightarrow{\text{SE E SOLO SE}} a+c \leq b+c$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \forall c > 0 \quad a \leq b \Leftrightarrow c \cdot a \leq c \cdot b$
- $\forall a, b \in \mathbb{R} \text{ e } \forall c < 0 \quad a \leq b \Leftrightarrow c \cdot a \geq c \cdot b$

OSSERVAZIONE: $\forall a, b \geq 0 \quad a \leq b \Leftrightarrow a^2 \leq b^2$

Si noti che $-3 \leq 2$, ma $(-3)^2 \leq 2^2$ non vale

In $\mathbb{R}$ vale l'ASSIOMA DI COMPLETEZZA che assicura la corrispondenza biunivoca tra gli elementi di $\mathbb{R}$ e i punti della retta orientata. Per questo $\mathbb{R}$ si dice anche COMPLETO.

INTERVALLI

Notazioni: $\forall a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$.

Intervalli LIMITATI:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{APERTO}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

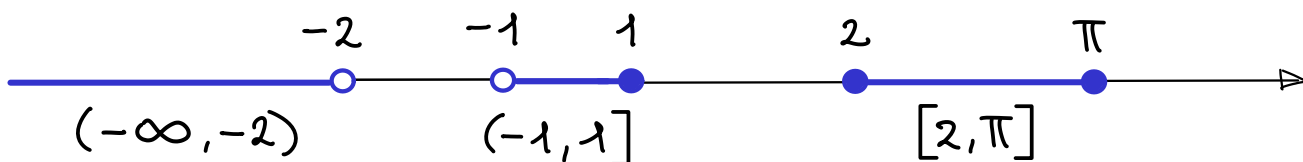
$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \text{CHIUSO}$$

Intervalli NON LIMITATI:

$$\begin{aligned} (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\ (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (-\infty, a) &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\ (a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \end{aligned}} \right\} \text{APERTI}$$

$$\begin{aligned} (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\ [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} (-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\ [a, +\infty) &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \end{aligned}} \right\} \text{CHIUSI}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \quad \text{APERTO e CHIUSO}$$



OSSERVAZIONE $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se e solo se $\forall a, b \in I$ si ha che $[a, b] \subseteq I$.

ESEMPIO Descrivere l'insieme

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x} < 2 \right\}$$

come unione di intervalli.

Per le proprietà di $\mathbb{R}$ è necessario che

$$1-x \neq 0 \quad \text{denominatore} \neq 0 \iff x \neq 1$$

$$4-x^2 \geq 0 \quad \text{argomento della radice quadrata} \geq 0$$

$$\iff (2+x)(2-x) \geq 0 \iff x \in [-2, 2]$$

Quindi dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} x \neq 1 \\ -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x} < 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Non si può elevare al quadrato} \\ \text{altrimenti si perde il segno di } 1-x \end{array}$$

Distinguiamo due casi a seconda del segno di $1-x$: $x > 1$ oppure $x < 1$

$$\begin{array}{ccc} \begin{cases} x > 1 \\ -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x} < 2 \end{cases} & \cup & \begin{cases} x < 1 \\ -2 \leq x \leq 2 \\ \frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x} < 2 \end{cases} \\ \underbrace{\frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}}_{\leq 0} \uparrow \text{sempre vero} & & \underbrace{\frac{\sqrt{4-x^2}}{1-x}}_{\geq 0} \\ \updownarrow & & \updownarrow \text{elevo al quadrato} \\ x \in (1, 2] & & \begin{cases} x \in [-2, 1) \\ 4-x^2 < 4(1-x)^2 \end{cases} \\ \hline 4-x^2 < 4-8x+4x^2 & & \updownarrow \\ 5x^2-8x > 0 & & x \in [-2, 0) \\ x(5x-8) > 0 & & \\ x < 0 \vee x > \frac{8}{5} & & \end{array}$$

Quindi $A = [-2, 0) \cup (1, 2]$.