Analisi Matematica

Foglio di esercizi n. 12

SOLUZIONI

Esercizio 1. Calcolare l'integrale

$$\int_0^1 \sqrt{x} \arcsin(2x-1)\, dx.$$

Integrando per parti, e poi effettuando la sostituzione $t = \sqrt{1-x}$, si ha che

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sqrt{x} \arcsin(2x-1)\, dx &= \int_0^1 \arcsin(2x-1)\, d\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right) \\
&= \frac{2}{3}\left[\arcsin(2x-1)x^{3/2}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{2x^{3/2}}{\sqrt{1-(2x-1)^2}}\, dx \\
&= \frac{2}{3}\left(\arcsin(1) - 0\right) - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{2x^{3/2}}{\sqrt{4x(1-x)}}\, dx \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}}\, dx \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{2}{3}\int_1^0 \frac{1-t^2}{t}\,(-2t\, dt) \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3}\int_0^1 (1-t^2)\, dt \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{4}{3}\left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{3} - \frac{8}{9}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^\alpha} \log\left(\frac{x}{x-1}\right)\, dx.$$

Calcolare l'integrale per $\alpha = 1/2$.

Nell'intervallo $(1, +\infty)$ i punti da indagare sono due: 1^+ e $+\infty$.
Per $x \to 1^+$, $t = x - 1 \to 0^+$,

$$\frac{1}{(x-1)^\alpha} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{\log(1+t) - \log(t)}{t^\alpha} \sim -\frac{\log(t)}{t^\alpha} = \frac{1}{t^\alpha |\log(t)|^{-1}}.$$

Quindi, per la convergenza, $\alpha < 1$.
Per $x \to +\infty$,

$$\frac{1}{(x-1)^\alpha} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{1}{(x-1)^\alpha} \cdot -\log\left(1 - \frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x^{\alpha+1}}.$$

Per la convergenza, $\alpha + 1 > 1$ ossia $\alpha > 0$.
Così, l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $0 < \alpha < 1$.

Ora calcoliamo l'integrale per $\alpha = 1/2$. Ponendo $s = \sqrt{x-1}$ e $dx = 2s ds$, si ha che

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{s} \log\left(\frac{s^2+1}{s^2}\right) (2s ds) \\
&= 2\int_0^{+\infty} \log\left(1 + s^{-2}\right) ds \\
&= 2\left[s \log\left(1 + s^{-2}\right)\right]_0^{+\infty} - 2\int_0^{+\infty} s \cdot \frac{(-2s^{-3})}{1+s^{-2}}\, ds \\
&= 0 + 4\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+s^2}\, ds \\
&= 4\left[\arctan(s)\right]_{0^+}^{+\infty} = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.
\end{aligned}$$

Si noti che $\lim_{s\to 0^+} s \log\left(1 + s^{-2}\right) = 0$ e $\lim_{s\to+\infty} s \log\left(1 + s^{-2}\right) = 0$.

Esercizio 3.a. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 3e^{-2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = 2$ è

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 2\,dx = 2x$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{2x}.$$

Quindi integriamo

$$\int e^{A(x)} f(x)\,dx = \int e^{2x}\,3e^{-2x}\,dx = \int 3\,dx = 3x + c.$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)}\,f(x)\,dx = e^{-2x}\,(3x + c)\,.$$

Ora imponiamo la condizione $y(0) = 1$:

$$y(0) = c = 1.$$

Così la soluzione cercata in $\mathbb{R}$ è

$$y(x) = e^{-2x}\,(3x + 1)\,.$$

Esercizio 3.b. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = xe^{-x^2} \\ y(1) = e^{-1} \end{cases}$$

Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = 2x$ è

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2$$

e il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{x^2}.$$

Quindi integriamo

$$\int e^{A(x)} f(x)\,dx = \int e^{x^2}\,xe^{-x^2}\,dx = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c.$$

Dunque la soluzione generale è uguale a

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)}\, f(x)\, dx = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + c \right).$$

Ora imponiamo la condizione $y(1) = e^{-1}$:

$$y(1) = e^{-1} \left(\frac{1}{2} + c \right) = e^{-1}$$

da cui si ricava che $c = 1/2$. Quindi la soluzione cercata in $\mathbb{R}$ è

$$y(x) = \frac{x^2 + 1}{2e^{x^2}}.$$

Esercizio 3.c. Risolvere il problema di Cauchy per $x \in (-2, +\infty)$,

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x+2} = 3e^x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Una primitiva di $a(x) = 1/(x+2)$ per $x > -2$ è

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{1}{x+2}\, dx = \log(x+2).$$

Allora il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{\log(x+2)} = x + 2.$$

Quindi integriamo

$$\begin{aligned} \int e^{A(x)}\, f(x)\, dx &= \int (x+2)\, 3e^x\, dx = 3 \int (x+2)\, d(e^x) \\ &= 3(x+2)e^x - 3 \int e^x\, dx = 3(x+1)e^x + c \end{aligned}$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)}\, f(x)\, dx = \frac{3(x+1)e^x + c}{x+2}$$

Ora imponiamo la condizione $y(0) = 2$:

$$y(0) = \frac{3 + c}{2} = 2$$

da cui si ricava che $c = 1$. Quindi la soluzione cercata in $(-2, +\infty)$ è

$$y(x) = \frac{3(x+1)e^x + 1}{x+2}.$$

Esercizio 3.d. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$,

$$\begin{cases} y'(x) + \tan(x) y(x) = \dfrac{1}{\cos(x)} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = \tan(x)$ in $(-\pi/2, \pi/2)$,

$$A(x) = \int \tan(x)\, dx = -\int \frac{1}{\cos(x)}\, d(\cos(x)) = -\log|\cos(x)| = -\log(\cos(x)).$$

Allora il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{-\log(\cos(x))} = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Quindi integriamo

$$\int e^{A(x)} f(x)\, dx = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx = \tan(x) + c$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x)\, dx = \cos(x)\ (\tan(x) + c) = \sin(x) + c\cos(x).$$

Infine imponiamo la condizione $y(0) = 4$:

$$y(0) = c = 4$$

e la soluzione cercata in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è

$$y(x) = \sin(x) + 4\cos(x).$$

Esercizio 3.e. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \in (0, +\infty)$,

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x} = 2\arctan(x) \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = 1/x$ per $x > 0$ è

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \log(x).$$

Allora il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{\log x} = x.$$

Quindi integriamo

$$
\begin{aligned}
\int e^{A(x)}\, f(x)\, dx = \int 2x\, \arctan(x)\, dx &= \int \arctan(x)\, d(x^2) \\
&= x^2\, \arctan(x) - \int \frac{x^2}{1+x^2}\, dx \\
&= x^2\, \arctan(x) - \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\, dx \\
&= x^2\, \arctan(x) - x + \arctan(x) + c \\
&= (x^2+1)\arctan(x) - x + c
\end{aligned}
$$

e la soluzione generale è

$$
\begin{aligned}
y(x) &= e^{-A(x)} \int e^{A(x)}\, f(x)\, dx = \frac{1}{x}\big((x^2+1)\arctan(x) - x + c\big) \\
&= \left(x + \frac{1}{x}\right)\arctan(x) - 1 + \frac{c}{x}
\end{aligned}
$$

Infine imponiamo la condizione $y(1) = -1$:

$$
y(1) = \frac{\pi}{2} - 1 + c = -1
$$

da cui si ricava che $c = -\frac{\pi}{2}$. Quindi la soluzione cercata in $(0, +\infty)$ è

$$
y(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)\arctan(x) - 1 - \frac{\pi}{2x}.
$$

Esercizio 3.f. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \in \mathbb{R}$,

$$
\begin{cases}
(1+x^4)y'(x) = -4x^3 y(x) + 3x^2 \\
y(0) = 5
\end{cases}
$$

Si tratta di un'equazione differenziale lineare del primo ordine e per identificare correttamente la funzione $a(x)$ dobbiamo prima risistemare i termini

$$
y'(x) + \frac{4x^3}{1+x^4} y(x) = \frac{3x^2}{1+x^4}.
$$

Allora $a(x) = 4x^3/(1+x^4)$ e una sua primitiva è

$$
A(x) = \int a(x)\, dx = \int \frac{4x^3}{1+x^4}\, dx = \int \frac{1}{1+x^4}\, d(x^4) = \log(1+x^4)
$$

e il fattore integrante è

$$
e^{A(x)} = e^{\log(1+x^4)} = 1 + x^4.
$$

Quindi integriamo

$$\int e^{A(x)} f(x)\, dx = \int (1+x^4) \cdot \frac{3x^2}{1+x^4}\, dx = \int 3x^2\, dx = x^3 + c$$

e la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x)\, dx = \frac{x^3+c}{1+x^4}.$$

Ora imponiamo la condizione $y(0) = 5$:

$$y(0) = c = 5.$$

Quindi la soluzione cercata in $\mathbb{R}$ è

$$y(x) = \frac{x^3+5}{x^4+1}.$$

Esercizio 4.a. Per $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, determinare il gradiente nel punto $(3,-1)$ e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(3,-1,f(3,-1))$.

Abbiamo che

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = \frac{2y}{(x+y)^2} \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2} = -\frac{2x}{(x+y)^2} \end{aligned}$$

da cui il gradiente in $(3,-1)$ è uguale a

$$\nabla f(3,-1) = (f_x(3,-1), f_y(3,-1)) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right).$$

Così il piano tangente al grafico di f nel punto $(3,-1,f(3,-1))$ è

$$\begin{aligned} z &= f(3,-1) + f_x(3,-1)(x-3) + f_y(3,-1)(y+2) \\ &= 2 - \frac{1}{2}(x-3) - \frac{3}{2}(y+1) = 2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}y. \end{aligned}$$

Esercizio 4.b. Per $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$, determinare il gradiente nel punto $(1,2)$ e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1,2,f(1,2))$.

Abbiamo che

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{9-x^2-y^2}\right) = -\frac{x}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sqrt{9-x^2-y^2}\right) = -\frac{y}{\sqrt{9-x^2-y^2}} \end{aligned}$$

da cui il gradiente in $(1,2)$ è uguale a

$$\nabla f(1,2) = (f_x(1,2), f_y(1,2)) = \left(-\frac{1}{2}, -1\right).$$

Così il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,2,f(1,2))$ è

$$\begin{aligned} z &= f(1,2) + f_x(1,2)(x-1) + f_y(1,2)(y-2) \\ &= 2 - \frac{1}{2}(x-1) - (y-2) = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}x - y. \end{aligned}$$

Esercizio 4.c. Per $f(x,y) = 2\arctan(y/x)$, determinare il gradiente nel punto $(1,1)$ e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(1,1,f(1,1))$.

Abbiamo che

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2\arctan(y/x)\right) = \frac{-2y/x^2}{1+(y/x)^2} = -\frac{2y}{x^2+y^2}$$
$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2\arctan(y/x)\right) = \frac{2/x}{1+(y/x)^2} = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

da cui il gradiente in $(1,1)$ è uguale a

$$\nabla f(1,1) = (f_x(1,1), f_y(1,1)) = (-1,1)\,.$$

Così il piano tangente al grafico di f nel punto $(1,1,f(1,1))$ è

$$\begin{aligned} z &= f(1,1) + f_x(1,1)(x-1) + f_y(1,1)(y-1) \\ &= \frac{\pi}{2} - (x-1) + (y-1) = \frac{\pi}{2} - x + y. \end{aligned}$$

Esercizio 4.d. Per $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy^2)}{y}$, determinare il gradiente nel punto $(\pi,1)$ e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(\pi,1,f(\pi,1))$.

Abbiamo che

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin(xy^2)}{y}\right) = \frac{y^2\cos(xy^2)}{y} = y\cos(xy^2)$$
$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin(xy^2)}{y}\right) = \frac{\cos(xy^2)(2xy)y - \sin(xy^2)}{y^2} = 2x\cos(xy^2) - \frac{\sin(xy^2)}{y^2}$$

da cui il gradiente in $(\pi,1)$ è uguale a

$$\nabla f(\pi,1) = (f_x(\pi,1), f_y(\pi,1)) = (-1,-2\pi)\,.$$

Così il piano tangente al grafico di f nel punto $(\pi,1,f(\pi,1))$ è

$$\begin{aligned} z &= f(\pi,1) + f_x(\pi,1)(x-\pi) + f_y(\pi,1)(y-1) \\ &= 0 - (x-\pi) - 2\pi(y-1) = 3\pi - x - 2\pi y. \end{aligned}$$

Esercizio 5.a. Trovare tutti i punti critici della funzione $f(x,y) = y^2e^x - x^2 + x$ e studiarne la natura.

Abbiamo che

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2e^x - x^2 + x\right) = y^2e^x - 2x + 1 \\
f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2e^x - x^2 + x\right) = 2ye^x.
\end{aligned}
$$

I punti critici si ottengono risolvendo $\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (0,0)$ ossia

$$
\begin{cases} y^2e^x - 2x + 1 = 0 \\ 2ye^x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} -2x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 0 \end{cases}
$$

e quindi c'è un solo punto critico: $(1/2, 0)$.
Inoltre le derivate seconde di f sono:

$$
\begin{aligned}
f_{xx}(x,y) &= y^2e^x - 2 \\
f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 2ye^x \\
f_{yy}(x,y) &= 2e^x.
\end{aligned}
$$

Calcoliamo la matrice hessiana $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ nel punto critico:

$$
H_f(1/2, 0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{e} \end{bmatrix}.
$$

Dato che $\det(H_f(1/2,0)) = -4\sqrt{e} < 0$ allora $(1/2, 0)$ è un punto di sella.

Esercizio 5.b. Trovare tutti i punti critici della funzione $f(x,y) = x^2 - 4xy + 3y^2 + y^3$ e studiarne la natura.

Abbiamo che

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 4xy + 3y^2 + y^3\right) = 2x - 4y \\
f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 4xy + 3y^2 + y^3\right) = -4x + 6y + 3y^2.
\end{aligned}
$$

I punti critici si ottengono risolvendo $\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (0,0)$ ossia

$$
\begin{cases} 2x - 4y = 0 \\ -4x + 6y + 3y^2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2y \\ -4(2y) + 6y + 3y^2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2y \\ y(3y - 2) = 0 \end{cases}
$$

e quindi i punti critici sono: $(0,0)$ e $(4/3, 2/3)$.

Inoltre le derivate seconde di f sono:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2 \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = -4 \\ f_{yy}(x,y) &= 6+6y. \end{aligned}$$

Calcoliamo la matrice hessiana $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ nei punti critici:

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad H_f(4/3,2/3) = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{bmatrix}.$$

Dato che $\det(H_f(0,0)) = 12 - (-4)^2 = -4 < 0$ allora $(0,0)$ è un punto di sella.
Dato che $\det(H_f(\frac{4}{3},\frac{2}{3})) = 20 - (-4)^2 = 4 > 0$ e $f_{xx}(\frac{4}{3},\frac{2}{3}) = 2 > 0$ allora $(\frac{4}{3},\frac{2}{3})$ è un punto di minimo relativo.

Esercizio 5.c. Trovare tutti i punti critici della funzione $f(x,y) = xy(1-x-y)$ e studiarne la natura.

Abbiamo che

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(xy(1-x-y)) = y - 2xy - y^2 = y(1-2x-y) \\ f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}(xy(1-x-y)) = x - x^2 - 2xy = x(1-x-2y). \end{aligned}$$

I punti critici si ottengono risolvendo $\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (0,0)$ ossia

$$\begin{cases} y(1-2x-y) = 0 \\ x(1-x-2y) = 0 \end{cases}, \begin{cases} y = 0 \\ x(1-x-2y) = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 1-2x \\ x(1-x-2y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x(1-x) = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} y = 1-2x \\ x(3x-1) = 0 \end{cases}$$

e quindi i punti critici sono: $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1/3,1/3)$.
Inoltre le derivate seconde di f sono:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -2y \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 1-2x-2y \\ f_{yy}(x,y) &= -2x. \end{aligned}$$

Calcoliamo la matrice hessiana $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ nei punti critici:

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, H_f(1,0) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, H_f(0,1) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, H_f(\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{3}) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Dato che $\det(H_f(0,0)) = -1 < 0$ allora $(0,0)$ è un punto di sella.
Dato che $\det(H_f(1,0)) = -1 < 0$ allora $(1,0)$ è un punto di sella.
Dato che $\det(H_f(0,1)) = -1 < 0$ allora $(0,1)$ è un punto di sella.
Dato che $\det(H_f(\frac{1}{3},\frac{1}{3})) = \frac{1}{3} > 0$ e $f_{xx}(\frac{1}{3},\frac{1}{3})) = -\frac{2}{3} < 0$ allora $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ è un punto di massimo relativo.

Esercizio 5.d. Trovare tutti i punti critici della funzione $f(x,y) = \dfrac{4}{x} + \dfrac{x}{y} + 2y$ e studiarne la natura.

Abbiamo che per $x \neq 0$ e $y \neq 0$,

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4}{x} + \frac{x}{y} + 2y\right) = -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{y}$$
$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4}{x} + \frac{x}{y} + 2y\right) = -\frac{x}{y^2} + 2.$$

I punti critici si ottengono risolvendo $\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (0,0)$ ossia

$$\begin{cases} -\frac{4}{x^2} + \frac{1}{y} = 0 \\ -\frac{x}{y^2} + 2 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4y = x^2 \\ x = 2y^2 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 4y = 4y^2 \\ x = 2y^2 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

e quindi c'è un solo punto critico: $(2,1)$.
Inoltre le derivate seconde di f sono:

$$f_{xx}(x,y) = \frac{8}{x^3}$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$$
$$f_{yy}(x,y) = \frac{2x}{y^3}.$$

Calcoliamo la matrice hessiana $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ nel punto critico:

$$H_f(2,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dato che $\det(H_f(2,1)) = 3 > 0$ e $f_{xx}(2,1) = 1 > 0$ allora $(2,1)$ è un punto di minimo relativo.

Esercizio 6.a. Fare un esempio di di quattro numeri complessi z_1, z_2, z_3, z_4 che siano vertici di un quadrilatero (convesso) con tutti i quattro lati della stessa lunghezza, ma con le due diagonali di lunghezza diversa.

Il quadrilatero richiesto è un rombo che è parallelogramma con tutti i quattro lati della stessa lunghezza. Quindi, per le proprietà della somma di due numeri complessi, possiamo prendere $z_1 = 0$, z_2 e z_4 tali che $|z_2| = |z_4|$ e $z_3 = z_2 + z_4$. Allora le due diagonali, $z_3 - z_1$ e $z_4 - z_2$ sono di lunghezza diversa se e solo se $|z_3 - z_1| \neq |z_4 - z_2|$.
Ad esempio $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + i$, $z_4 = \overline{z_2} = 2 - i$ e $z_3 = z_2 + z_4 = 4$ hanno le proprietà richieste: le lunghezze dei lati sono

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_2| = |z_4 - z_3| = |z_1 - z_4| = \sqrt{5}$$

e le due diagonali misurano

$$|z_3 - z_1| = |4 - 0| = 4 \quad \text{e} \quad |z_4 - z_2| = |2 - i - (2 + i)| = | - 2i| = 2.$$

Un altro esempio è $z_1 = -1$, $z_2 = 2i$, $z_3 = 1$ e $z_4 = -2i$.

Esercizio 6.b. Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2(2x)\cos(3x)\, dx.$$

Per la formula di Eulero, $\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$ e quindi

$$\begin{aligned}
\cos^2(2x)\cos(3x) &= \frac{1}{2^2}(e^{2ix} + e^{-2ix})^2 \cdot \frac{1}{2}(e^{3ix} + e^{-3ix}) \\
&= \frac{1}{8}(e^{4ix} + e^{-4ix} + 2) \cdot (e^{3ix} + e^{-3ix}) \\
&= \frac{1}{8}(e^{7ix} + e^{-ix} + 2e^{3ix} + e^{ix} + e^{-7ix} + 2e^{-3ix}) \\
&= \frac{1}{8}((e^{7ix} + e^{-7ix}) + 2(e^{3ix} + e^{-3ix}) + (e^{ix} + e^{-ix})) \\
&= \frac{1}{8}(2\cos(7x) + 4\cos(3x) + 2\cos(x)) \\
&= \frac{1}{4}(\cos(7x) + 2\cos(3x) + \cos(x)).
\end{aligned}$$

Così

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \cos^2(2x)\cos(3x)\, dx &= \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (\cos(7x) + 2\cos(3x) + \cos(x))\, dx \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{\sin(7x)}{7} + 2\frac{\sin(3x)}{3} + \sin(x))\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{-3 - 14 + 21}{4 \cdot 21} = \frac{1}{21}.
\end{aligned}$$