

Analisi Matematica

Foglio di esercizi n. 12

1. Calcolare l'integrale $\int_0^1 \sqrt{x} \arcsin(2x - 1) dx$.
2. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x-1)^\alpha} \log\left(\frac{x}{x-1}\right) dx.$$

Calcolare l'integrale per $\alpha = 1/2$.

3. Risolvere i seguenti problemi di Cauchy nell'intervallo assegnato.

a.
$$\begin{cases} y'(x) + 2y(x) = 3e^{-2x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

per $x \in \mathbb{R}$

b.
$$\begin{cases} y'(x) + 2xy(x) = xe^{-x^2} \\ y(1) = e^{-1} \end{cases}$$

per $x \in \mathbb{R}$

c.
$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x+2} = 3e^x \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

per $x \in (-2, +\infty)$

d.
$$\begin{cases} y'(x) + \tan(x)y(x) = \frac{1}{\cos(x)} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

per $x \in (-\pi/2, \pi/2)$

e.
$$\begin{cases} y'(x) + \frac{y(x)}{x} = 2 \arctan(x) \\ y(1) = -1 \end{cases}$$

per $x \in (0, +\infty)$

f.
$$\begin{cases} (1+x^4)y'(x) = -4x^3y(x) + 3x^2 \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

per $x \in \mathbb{R}$

4. Per ciascuna funzione f determinare il gradiente nel punto assegnato (x_0, y_0) e l'equazione del piano tangente al grafico nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

a. $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, $(3, -1)$

b. $f(x, y) = \sqrt{9-x^2-y^2}$, $(1, 2)$

c. $f(x, y) = 2 \arctan(y/x)$, $(1, 1)$

d. $f(x, y) = \frac{\sin(xy^2)}{y}$, $(\pi, 1)$

5. Per ciascuna funzione f trovare tutti i punti critici e studiarne la natura.

a. $f(x, y) = y^2e^x - x^2 + x$

b. $f(x, y) = x^2 - 4xy + 3y^2 + y^3$

c. $f(x, y) = xy(1-x-y)$

d. $f(x, y) = \frac{4}{x} + \frac{x}{y} + 2y$

6. Risolvere i seguenti problemi:

- a. fare un esempio di di quattro numeri complessi z_1, z_2, z_3, z_4 che siano vertici di un quadrilatero (convesso) con tutti i quattro lati della stessa lunghezza, ma con le due diagonali di lunghezza diversa;

- b. calcolare $\int_0^{\pi/2} \cos^2(2x) \cos(3x) dx$.