

Analisi Matematica

Foglio di esercizi n. 11

1. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = |3 - x|e^{1/(2-x)}$$

specificando: dominio, eventuali asintoti, intervalli di monotonia, eventuali punti di massimo/minimo relativo, eventuali punti di non derivabilità, intervalli di convessità/concavità ed eventuali flessi.

2. Calcolare i seguenti integrali definiti.

a. $\int_0^{\pi/4} \sin(2x) \log^2(\sin^2(x)) dx$ b. $\int_1^{+\infty} \frac{\log(x^2 - x)}{x^3} dx$

3. Discutere la convergenza dei seguenti integrali impropri al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

a. $\int_1^{+\infty} \frac{\log^3(x)}{(x-1)^a \log^5(1+x^x)} dx$ b. $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^8)}{x^a \log^2(1+x^3)} dx$
c. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(x)}{(1 - \cos^3(x))^a} dx$ d. $\int_0^{\pi/2} \frac{\arctan(\sqrt{\sin(x)})}{\sin^a(2x) \sqrt{\cos(x)}} dx$

4. Discutere la convergenza delle seguenti serie al variare del parametro $a > 0$.

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\log(k^2 + 3k) - 2 \log(k)}{(\log(\sqrt{k} + 1))^{3a}}$ b. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4^k + k)a^{2k}}{3^k - 1}$
c. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k} + (-1)^k k^a}{k^a \sqrt{k}}$ d. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^a + k^2}{k^{2a} + k^3}$

5. Risolvere le seguenti equazioni in $\mathbb{C}$.

a. $(3 + i)z = 2 - 4i$ b. $(2 - i)\bar{z} - 5 = (1 + 2i)^3$
c. $2z(z + 1) = -|3 - 4i|$ d. $z^2(z^2 + 13) = -36$
e. $||z| - 3i|^2 = 4$ f. $(1 + i)^2((z + 4i)^2 - i) = 6$
g. $(z + 3)^3 = 64$ h. $(z^4 + 16)(z^2 - 2z + 3 - 2i\sqrt{3}) = 0$

6. Risolvere i seguenti problemi:

- a. calcolare la somma della serie $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)$;
b. fare un esempio di una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ tale che $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, ma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = +\infty$.
c. fare un esempio di un numero complesso z tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} |z|^n = 0$ e $(1 + i)z + (1 - i)\bar{z} = -2$.