Analisi Matematica
Foglio di esercizi n. 10
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{(\log(1-x)-x)^2 - 2\sin(2x^2+x^3)}{e^{-x^2}-\cos(\sqrt{2}x)}.$$

Per $x \to 0$,
$$\log(1-x) = (-x) - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} + o((-x)^3) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$
e quindi
$$\begin{aligned}(\log(1-x)-x)^2 &= \Big(2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\Big)^2 = 4x^2 + 2x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{4x^4}{3} + o(x^4)\\ &= 4x^2 + 2x^3 + \frac{19x^4}{4} + o(x^4)\end{aligned}$$
Inoltre
$$\begin{aligned}\sin(2x^2+x^3) &= (2x^2+x^3) + o(x^4)\\ e^{-x^2} &= 1 - x^2 + \frac{(-x^2)^2}{2} + o(x^4) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\\ \cos(\sqrt{2}x) &= 1 - \frac{(\sqrt{2}x)^2}{2} + \frac{(\sqrt{2}x)^4}{4!} + o(x^4) 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4).\end{aligned}$$
Infine
$$\begin{aligned}\frac{(\log(1-x)-x)^2 - 2\sin(2x^2+x^3)}{e^{-x^2}-\cos(\sqrt{2}x)} &= \frac{4x^2+2x^3+\frac{19x^4}{12}+o(x^4) - 2\Big(2x^2+x^3+o(x^4)\Big)}{1-x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4) - \Big(1-x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^4)\Big)}\\ &= \frac{\frac{19x^4}{12}+o(x^4)}{\frac{x^4}{3}+o(x^4)} \to \frac{19}{4}.\end{aligned}$$

Esercizio 2.a. Calcolare
$$\int_0^2 \frac{3x^3+2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$

Ponendo $x = 2\sin(t)$ abbiamo che $dx = 2\cos(t)dt$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{3x^3+2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{24\sin^3(t)+8\sin^2(t)}{2\cos(t)}\,(2\cos(t)dt) \\
&= 24\int_0^{\pi/2}(1-\cos^2(t))\sin(t)\,dt + 4\int_0^{\pi/2}(1-\cos(2t))\,dt \\
&= 24\Big[-\cos(t)+\frac{\cos^3(t)}{3}\Big]_0^{\pi/2} + 4\Big[t-\frac{\sin(2t)}{2}\Big]_0^{\pi/2} \\
&= 24\cdot\frac{2}{3} + 4\cdot\frac{\pi}{2} = 16+2\pi
\end{aligned}$$

dove $2\sin^2(t) = 1-\cos(2t)$.

Esercizio 2.b. Calcolare
$$\int_0^1 \frac{\log(x+3)}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Iniziamo integrando per parti e poi poniamo $t=\sqrt{x}$, così $dx = 2tdt$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\log(x+3)}{\sqrt{x}}\,dx &= 2\int_0^1 \log(x+3)\,d(\sqrt{x}) \\
&= 2\Big[\sqrt{x}\log(x+3)\Big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{x+3}\,dx \\
&= 2\log(4) - 4\int_0^1 \frac{t^2\pm 3}{t^2+3}\,dt \\
&= 2\log(4) - 4\int_0^1 dt + 12\int_0^1 \frac{dt}{t^2+3} \\
&= 4\log(2) - 4 + 12\Big[\frac{\arctan(t/\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\Big]_0^1 \\
&= 4\log(2) - 4 + \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.
\end{aligned}$$

Esercizio 2.c. Calcolare
$$\int_0^{+\infty} \frac{x+5}{(x+3)(x^2+3x+2)}\,dx.$$

Abbiamo che

$$\frac{x+5}{(x+3)(x^2+3x+2)} = \frac{x+5}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

dove

$$A = \lim_{x\to -1} \frac{x+5}{(x+2)(x+3)} = 2\ ,\ B = \lim_{x\to -2} \frac{x+5}{(x+1)(x+3)} = -3\ ,\ C = \lim_{x\to -3} \frac{x+5}{(x+1)(x+2)} = 1.$$

Allora

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x+5}{(x+3)(x^2+3x+2)}\,dx &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{3}{x+2} + \frac{1}{x+3} \right) dx \\
&= \Big[2\log|x+1| - 3\log|x+2| + \log|x+3| \Big]_0^{+\infty} \\
&= \left[\log\left(\frac{(x+1)^2(x+3)}{(x+2)^3} \right) \right]_0^{+\infty} \\
&= \log(8/3).
\end{aligned}$$

Esercizio 2.d. Calcolare
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx.$$

Poniamo $t = \sqrt{x}$, allora $t^2 = x$, $2tdt = dx$ e

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+t^4}\,(2tdt) = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\,dt.$$

Ora $t^3+1 = (t+1)(t^2-t+1)$ e

$$\frac{1}{t^3+1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{t-2}{t^2-t+1} \right).$$

Inoltre se $s = t - 1/2$ allora

$$\begin{aligned}
\int \frac{t-2}{t^2-t+1}\,dt &= \int \frac{s-3/2}{s^2+3/4}\,ds \\
&= \int \frac{s}{s^2+3/4}\,ds - \frac{3}{2}\int \frac{1}{s^2+(\sqrt{3}/2)^2}\,ds \\
&= \frac{1}{2}\log(s^2+3/4) - \sqrt{3}\arctan(2s/\sqrt{3}) + c \\
&= \frac{1}{2}\log(t^2-t+1) - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right) + c.
\end{aligned}$$

Quindi,

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3+1}\,dt \\
&= \frac{2}{3}\Big[\log(t+1) - \frac{1}{2}\log(t^2-t+1) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\Big]_0^{+\infty} \\
&= \frac{2}{3}\Big[\log\left(\frac{t+1}{\sqrt{t^2-t+1}}\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)\Big]_0^{+\infty} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2.e. Calcolare

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)\tan(2x)\,dx.$$

Notiamo che la funzione integranda è non-negativa sull'intervallo di integrazione. Inoltre per $x \to (\pi/4)^-$, $t = \pi/4 - x \to 0^+$,

$$\tan(x)\tan(2x) = \tan(\pi/4 - t)\tan(\pi/2 - 2t) = \frac{\tan(\pi/4 - t)}{\tan(2t)} \sim \frac{1}{2t}.$$

e dato che l'integrale di $1/t$ in un intorno destro di 0 è divergente a $+\infty$ possiamo concludere, senza determinare una primitiva di $\tan(x)\tan(2x)$, che anche l'integrale improprio in questione diverge,

$$\int_0^{\pi/4} \tan(x)\tan(2x)\,dx = +\infty.$$

Esercizio 2.f. Calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{4x}-1}}\,dx.$$

Poniamo $t = \sqrt{e^{4x}-1}$, allora $x = \frac{1}{4}\log(1+t^2)$, $dx = \frac{tdt}{2(1+t^2)}$ e

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^{4x}-1}}\,dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\cdot\frac{tdt}{2(1+t^2)} \\
&= \frac{1}{2}\Big[\arctan(t)\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi/2 - 0}{2} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

Esercizio 2.g. Calcolare
$$\int_0^1 \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}}\,dx.$$

Abbiamo che
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arccos(x)}{\sqrt{1-x}}\,dx &= \int_0^1 \arccos(x) d(-2\sqrt{1-x})\\ &= -2\Big[\arccos(x)\sqrt{1-x}\Big]_0^1 + 2\int_0^1 \sqrt{1-x}\,d(\arccos(x))\\ &= \pi - 2\int_0^1 \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \pi - 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\,dx\\ &= \pi - 2\Big[2\sqrt{1+x}\Big]_0^1 = \pi + 4 - 4\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Esercizio 2.h. Calcolare
$$\int_0^{+\infty} e^{-\lfloor x\rfloor}\,dx.$$

Dato che
$$e^{-\lfloor x\rfloor} = e^{-k} \quad \text{se } x \in [k, k+1),$$
per ogni intero $n \geq 0$,
$$\int_0^n e^{-\lfloor x\rfloor}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} e^{-\lfloor x\rfloor}\,dx \sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} e^{-k}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}(e^{-1})^k = \frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}.$$
allora per ogni numero reale $t \geq 0$
$$\int_0^t e^{-\lfloor x\rfloor}\,dx = \int_0^{\lfloor t\rfloor} e^{-\lfloor x\rfloor}\,dx + \int_{\lfloor t\rfloor}^t e^{-\lfloor x\rfloor}\,dx = \frac{1-e^{-\lfloor t\rfloor}}{1-e^{-1}} + e^{-\lfloor t\rfloor}(t-\lfloor t\rfloor)$$
infine per $t \to +\infty$.
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} e^{-\lfloor x\rfloor}\,dx &= \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-\lfloor x\rfloor}\\ &= \lim_{t\to+\infty}\frac{1-e^{-\lfloor t\rfloor}}{1-e^{-1}} + \lim_{t\to+\infty} e^{-\lfloor t\rfloor}(t-\lfloor t\rfloor)\\ &= \frac{1}{1-e^{-1}} + 0 = \frac{e}{e-1}.\end{aligned}$$

Esercizio 3.a. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin(x)(1-\sin(x))}}{\tan^a(x)\cos^2(x)}\,dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sin(x)(1-\sin(x))}}{\tan^a(x)\cos^2(x)}.$$

Nell'intervallo $(0, \pi/2)$ i punti da indagare sono due: 0^+ e $(\pi/2)^-$.
Per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{x^{1/2}}{x^a} \sim \frac{1}{x^{a-1/2}}.$$

Per la convergenza, $a - 1/2 < 1$ ossia $a < 3/2$.
Per $x \to (\pi/2)^-$, si ha che $t = \pi/2 - x \to 0^+$, $\sin(x) = \cos(t)$, $\cos(x) = \sin(t)$, $\tan(x) = 1/\tan(t)$ e

$$f(x) \sim \frac{(1-\cos(t))^{1/2}}{\tan^{-a}(t)\sin^2(t)} \sim \frac{(t^2/2)^{1/2}}{t^{2-a}} = \frac{2^{-1/2}}{t^{1-a}}.$$

Per la convergenza, $1 - a < 1$ ossia $a > 0$.
Così l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $0 < a < 3/2$.

Esercizio 3.b. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\tan(x)}{(\tan^2(x)-1)^a}\,dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x) = \frac{\tan(x)}{(\tan^2(x)-1)^a} = \frac{\tan(x)}{(\tan(x)+1)^a(\tan(x)-1)^a}.$$

Nell'intervallo $(\pi/4, \pi/2)$ i punti da indagare sono due: $(\pi/4)^+$ e $(\pi/2)^-$.
Per $x \to (\pi/4)^+$, si ha che $t = x - \pi/4 \to 0^+$ e

$$f(x) \sim \frac{1}{2^a(2t)^a} = \frac{1}{4^a t^a}$$

dove si è usato lo sviluppo di $\tan(x)$ in $x = \pi/4$

$$\tan(x) = \tan(\pi/4) + \tan'(\pi/4)(x-\pi/4) + o(x-\pi/4) = 1 + 2t + o(t).$$

Quindi, per la convergenza, $a < 1$.
Per $x \to (\pi/2)^-$, si ha che $t = \pi/2 - x \to 0^+$, $\tan(x) = 1/\tan(t) \sim 1/t$ e

$$f(x) \sim \frac{t^{-1}}{(t^{-2}-1)^a} = \frac{t^{-1}}{t^{-2a}(1-t^2)^a} \sim \frac{1}{t^{1-2a}}.$$

Per la convergenza, $1-2a<1$ ossia $a>0$.
Così l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $0<a<1$.

Esercizio 3.c. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^3 \frac{\sqrt{x+2}\,\log(x+2)}{(6+x-x^2)^a}\,dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x)=\frac{\sqrt{x+2}\,\log(x+2)}{(6+x-x^2)^a}=\frac{\log(x+2)}{(3-x)^a(x+2)^{a-1/2}}.$$

Nell'intervallo $[0,3)$ è necessario indagare solo in 3^-.
Per $x\to 3^-$, si ha che $t=3-x\to 0^+$ e

$$f(x)\sim\frac{\log(5)}{t^a 5^{a-1/2}}=\frac{C}{t^a}$$

e quindi l'integrale di f su $[0,3)$ converge se e solo se $a<1$.

Esercizio 3.d. Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{|\sin(ax)-\log(1+2x)|}{x^2(\sqrt{4+x}+\sqrt{x}-2)}\,dx$$

al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

Sia

$$f(x)=\frac{|\sin(ax)-\log(1+2x)|}{x^2(\sqrt{4+x}+\sqrt{x}-2)}$$

Nell'intervallo $(0,1)$ è necessario indagare solo in 0^+.
Per $x\to 0^+$,

$$f(x)=\frac{|ax+o(x^2)-(2x-2x^2+o(x^2))|}{x^2(2(1+\frac{x/4}{2}+o(x))+x^{1/2}-2)}=\frac{|(a-2)x+2x^2+o(x^2)|}{x^2(x^{1/2}+\frac{x}{4}+o(x))}.$$

Quindi se $a\neq 2$,

$$f(x)\sim\frac{|a-2|x}{x^{5/2}}=\frac{|a-2|}{x^{3/2}}$$

e l'integrale non è convergente. Invece se $a=2$ allora

$$f(x)\sim\frac{2x^2}{x^{5/2}}=\frac{2}{x^{1/2}}$$

e l'integrale è convergente.
Quindi la convergenza si ha solo per $a=2$.

Esercizio 4.a. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^k - 2 \cdot 5^k}{20^{k-1}}.$$

La serie può essere riscritta nel modo seguente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(3 \cdot \frac{4^k}{20^{k-1}} - 2 \cdot \frac{5^k}{20^{k-1}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3 \cdot 4}{5^{k-1}} - \frac{2 \cdot 5}{4^{k-1}}\right).$$

Per la linearità possiamo scomporre la serie in due serie geometriche convergenti:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \left(3 \cdot \frac{4^k}{20^{k-1}} - 2 \cdot \frac{5^k}{20^{k-1}}\right) &= 12 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1} - 10 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} \\
&= 12 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{j} - 10 \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{j} \qquad (j = k-1) \\
&= \frac{12}{1 - \frac{1}{5}} - \frac{10}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{5}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.b. Calcolare la somma della serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 - 1}.$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1/2}{k-1} - \frac{1/2}{k+1}$$

e quindi la somma parziale S_n per $n \geq 3$ diventa

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=2}^{2} \frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1}\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=3}^{n+1} \frac{1}{j}\Big) = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big).
\end{aligned}$$

Così

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \frac{3}{4}.$$

Esercizio 5.a. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}}$$

La serie è a termini positivi e per $k \to \infty$,

$$\frac{1}{k^{1+\frac{1}{k}}} = \frac{1}{k \underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\to 1}} \sim \frac{1}{k}.$$

Quindi, per il confronto asintotico, dato che $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$, anche la serie data diverge a $+\infty$.

Esercizio 5.b. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(1/k)}{\log(k^2+k+1)}.$$

Per $k \to \infty$,

$$\frac{\sin(1/k)}{\log(k^2+k+1)} \sim \frac{1/k}{\log(k^2)} = \frac{1}{2k\log(k).}$$

Dato che $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log(k)} = +\infty$ ($\alpha = \beta = 1$), per confronto asintotico la serie data diverge a $+\infty$.

Esercizio 5.c. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2+1}-k}{e^{-k}+\log^2(k)}.$$

Abbiamo che, per $k \to \infty$,

$$\frac{\sqrt{k^2+1}-k}{e^{-k}+\log^2(k)} = \frac{k\left(\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}-1\right)}{\log^2(k)\left(1+\frac{e^{-k}}{\log^2(k)}\right)} \sim \frac{k\cdot\frac{1}{2k^2}}{\log^2(k)} = \frac{1}{2k\log^2(k)}$$

Così, per il confronto asintotico, dato che $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\log^2(k)}$ converge ($\alpha = 1, \beta = 2 > 1$), anche la serie data è convergente.

Esercizio 5.d. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k e^{-k^2}.$$

Sia $a_k = k^k e^{-k^2} > 0$ allora, per $k \to \infty$,

$$\sqrt[k]{a_k} = (k^k e^{-k^2})^{1/k} = k e^{-k} \to 0 < 1$$

e quindi la serie converge per il criterio della radice.

Esercizio 5.e. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \cos(\pi k) \arctan(1/k).$$

Abbiamo che $\cos(\pi k) = (-1)^k$. Inoltre $\arctan(1/k)$ è decrescente perché $\arctan(x)$ è una funzione crescente e

$$\lim_{k\to\infty} \arctan(1/k) = 0.$$

Dunque, per il criterio di Leibniz, la serie è convergente.

Esercizio 5.f. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3-1}\right).$$

Per $k \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3-1} &= k^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{k^3}} - \sqrt{1-\frac{1}{k^3}}\right) \\
&= k^{3/2}\left(1+\frac{1}{2k^3} + o(1/k^3) - \left(1-\frac{1}{2k^3} + o(1/k^3)\right)\right) \\
&= k^{3/2}\left(\frac{1}{k^3} + o(1/k^3)\right) \sim \frac{k^{3/2}}{k^3} = \frac{1}{k^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Così, per il confronto asintotico, dato che $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$ converge ($\alpha = 3/2$), anche la serie data è convergente.

Esercizio 5.g. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}.$$

Sia $a_k = (k!)^2/(2k)! > 0$ allora, per $k \to \infty$,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{((k+1)!)^2}{(2(k+1))!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{((k+1)(k!))^2}{(2k+2)(2k+1)(2k)!} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)(2k+1)} \to \frac{1}{4} < 1$$

e quindi la serie converge per il criterio del rapporto.

Esercizio 5.h. Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\log(k)}}.$$

Si ha che

$$\frac{1}{2^{\log(k)}} = \frac{1}{\exp(\log(k)\log(2)} = \frac{1}{k^{\log(2)}}.$$

Dato che $\alpha = \log(2) < 1$, la serie diverge a $+\infty$.

Esercizio 6.a. Sapendo che $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e$, calcolare $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$.

Per la prima serie si ha che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} = e$$

dove $j = k - 1$.
Per la seconda serie si ha che

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2 - k + k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(k-1)}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} + e = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} + e = 2e$$

dove $j = k - 2$.

Esercizio 6.b. Fare un esempio di una funzione f positiva e derivabile in $(0, +\infty)$ tale che $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ e $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ sia convergente.

Ad esempio la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^a + x^b}$$

con $0 < a < 1 < b$, ha le proprietà richieste (si veda anche l'esercizio 2.d).
Tale funzione è derivabile in $(0, +\infty)$,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

Quindi, per il teorema dei valori intermedi, $f((0, +\infty)) = (0, +\infty)$. Inoltre l'integrale improprio di f su $(0, 1)$ è convergente perché per

$$\text{per } x \to 0^+,\ f(x) = \frac{1}{x^a} \text{ con } a < 1 \quad \text{e} \quad \text{per } x \to +\infty,\ f(x) = \frac{1}{x^b} \text{ con } b > 1.$$