

Analisi Matematica
Foglio di esercizi n. 8
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin(4x)) - \cos(3 \sin(x))}{\log(e + x^2) - e^{2x^2}}.$$

Per $x \rightarrow 0$, il numeratore è

$$\begin{aligned} \cos(\sin(4x)) - \cos(3 \sin(x)) &= \cos(4x + o(x)) - \cos(3(x + o(x))) \\ &= \left(1 - \frac{(4x + o(x))^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{(3x + o(x))^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= -8x^2 + \frac{9x^2}{2} + o(x^2) = -\frac{7x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

Mentre il denominatore è

$$\begin{aligned} \log(e + x^2) - e^{2x^2} &= 1 + \log(1 + x^2/e) - e^{2x^2} \\ &= 1 + \left(\frac{x^2}{e} + o(x^2)\right) - (1 + 2x^2 + o(x^2)) \\ &= \frac{(1 - 2e)x^2}{e} + o(x^2). \end{aligned}$$

Quindi, per $x \rightarrow 0$,

$$\frac{\cos(\sin(4x)) - \cos(3 \sin(x))}{\log(e + x^2) - e^{2x^2}} = \frac{-\frac{7x^2}{2} + o(x^2)}{\frac{(1-2e)x^2}{e} + o(x^2)} \rightarrow \frac{7e}{4e - 2}.$$

Esercizio 1.b. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 + 2^{1/x})^x + x^{\log(x)}}{x \left(3^x - \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)^x\right)}.$$

Per $x \rightarrow +\infty$, dopo aver diviso numeratore e denominatore per 3^x abbiamo

$$\frac{(2 + 2^{1/x})^x + x^{\log(x)}}{x \left(3^x - \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)^x\right)} = \frac{\left(1 + \frac{2^{1/x} - 1}{3}\right)^x + \frac{x^{\log(x)}}{3^x}}{x \left(1 - \left(1 - \frac{1}{3x^2}\right)^x\right)}.$$

Ora

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{2^{1/x} - 1}{3}\right)^x &= \left(1 + \frac{e^{\log(2)/x} - 1}{3}\right)^x \\ &= \left(1 + \frac{\log(2)}{3x} + o(1/x)\right)^x \rightarrow e^{\log(2)/3} = \sqrt[3]{2}. \end{aligned}$$

Inoltre

$$\frac{x^{\log(x)}}{3^x} = \exp\left(\log^2(x) - x \log(3)\right) \rightarrow e^{-\infty} = 0.$$

Infine

$$\begin{aligned} x\left(1 - \left(1 - \frac{1}{3x^2}\right)^x\right) &= x\left(1 - \exp\left(x \log\left(1 - \frac{1}{3x^2}\right)\right)\right) \\ &= x\left(1 - \exp\left(x\left(-\frac{1}{3x^2} + o(1/x^2)\right)\right)\right) \\ &= \frac{1 - \exp\left(-\frac{1}{3x} + o(1/x)\right)}{1/x} \\ &= \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{3x} + o(1/x)\right)}{1/x} \rightarrow \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Così, per $x \rightarrow +\infty$,

$$\frac{(2 + 2^{1/x})^x + x^{\log(x)}}{x\left(3^x - \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)^x\right)} \rightarrow \frac{\sqrt[3]{2} + 0}{1/3} = 3\sqrt[3]{2}.$$

Esercizio 2.a. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 2 \log(x^2 - 2x + 2) - |x|$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Dato che $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 > 0$, il dominio è $D = \mathbb{R}$. Per $|x| \rightarrow +\infty$,

$$f(x) = -|x| + 4 \log |x| + o(1)$$

e quindi non ci sono asintoti a $\pm\infty$.

Per $x \neq 0$ la derivata prima è

$$f'(x) = \frac{4(x-1)}{x^2-2x+2} \mp 1 = \begin{cases} -\frac{x^2-6x+6}{x^2-2x+2} & \text{se } x \in (0, +\infty), \\ \frac{x^2+2x-2}{x^2-2x+2} & \text{se } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Quindi f è crescente in $(-\infty, -1 - \sqrt{3}]$ e in $[3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}]$ mentre è decrescente in $[-1 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}]$ e in $[3 + \sqrt{3}, +\infty)$. La funzione non è derivabile in 0 dove c'è un punto angoloso con

$$f'_-(0) = -1 \quad \text{e} \quad f'_+(0) = -3.$$

Il punto $x = -1 - \sqrt{3} \simeq -2.73$ è di massimo assoluto e $x = 3 + \sqrt{3} \simeq 4.73$ è un punto di massimo relativo, mentre $x = 3 - \sqrt{3} \simeq 1.27$ è un punto di minimo relativo. Non ci sono punti di minimo assoluto.

Per $x \neq 0$ la derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{4x(2-x)}{(x^2-2x+2)^2}.$$

La funzione è convessa in $[0, 2]$ ed è concava in $(-\infty, 0]$ e in $[2, +\infty)$. Il punto $x = 2$ è un flesso.

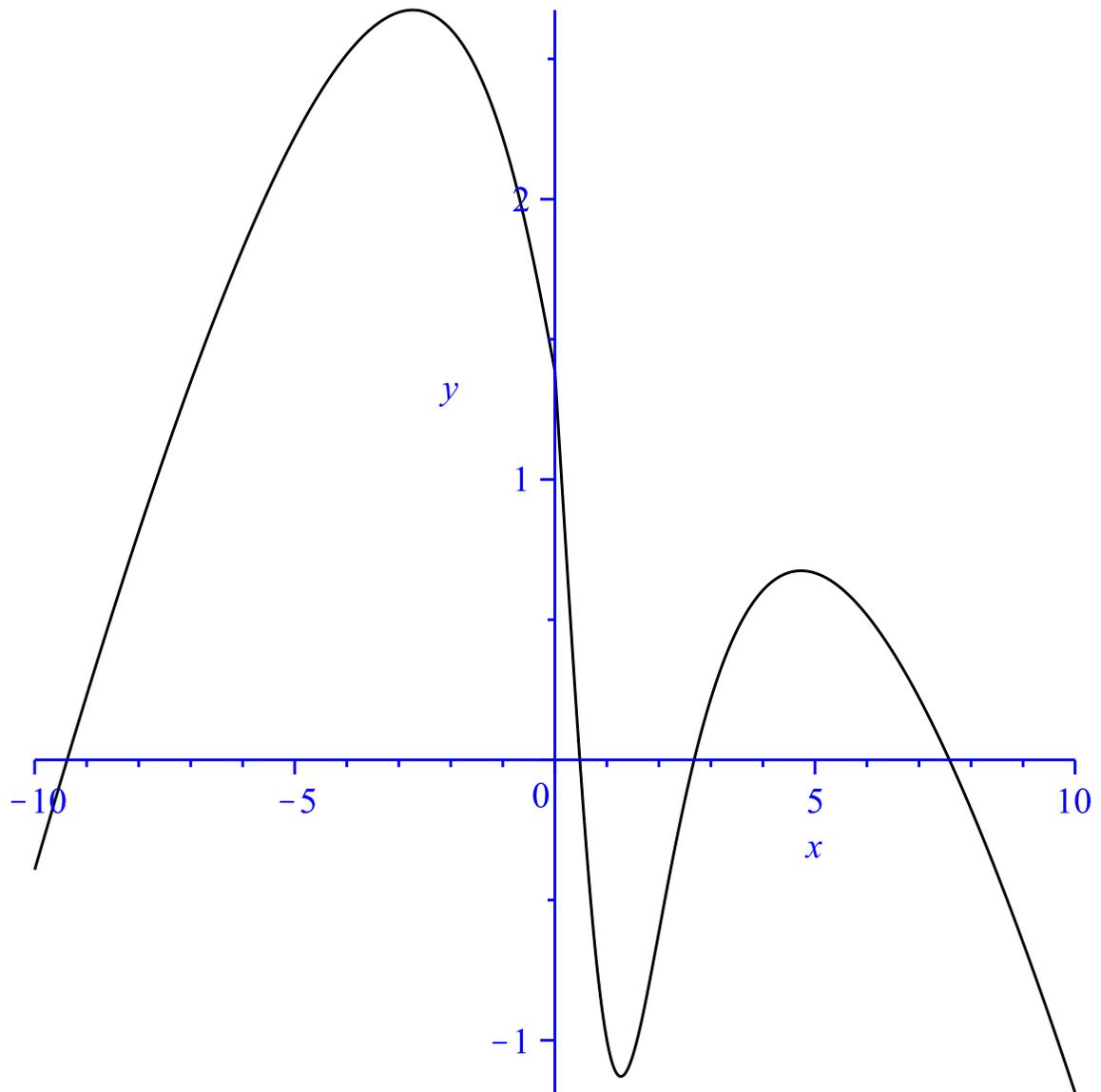


Grafico di $f(x) = 2 \log(x^2 - 2x + 2) - |x|$

Esercizio 2.b. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \arctan(1/x) + \frac{3|x|}{1+x^2}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\arctan(1/x) + \frac{3|x|}{1+x^2} \right) = 0$$

e quindi $y = 0$ è l'asintoto a $\pm\infty$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \left(\arctan(1/x) + \frac{3|x|}{1+x^2} \right) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Per $x \neq 0$, la derivata prima è

$$f'(x) = -\frac{1}{1+x^2} \pm \frac{3(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \begin{cases} \frac{2(1-2x^2)}{(1+x^2)^2} & \text{se } x \in (0, +\infty), \\ \frac{2(x^2-2)}{(1+x^2)^2} & \text{se } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

Quindi f è crescente in $(-\infty, -\sqrt{2}]$ e in $(0, 1/\sqrt{2}]$ mentre è decrescente in $[-\sqrt{2}, 0)$ e in $[1/\sqrt{2}, +\infty)$. Il punto $x = 1/\sqrt{2}$ è di massimo assoluto e $x = -\sqrt{2}$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono punti di minimo relativo.

Per $x \neq 0$, la derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{8x(x^2-2)}{(1+x^2)^3} & \text{se } x \in (0, +\infty), \\ \frac{4x(5-x^2)}{(1+x^2)^3} & \text{se } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

La funzione è convessa in $(-\infty, -\sqrt{5}]$ e in $[\sqrt{2}, +\infty)$, mentre è concava in $[-\sqrt{5}, 0)$ e in $(0, \sqrt{2}]$. Il punti $x = -\sqrt{5}$ e $x = \sqrt{2}$ sono dei flessi.

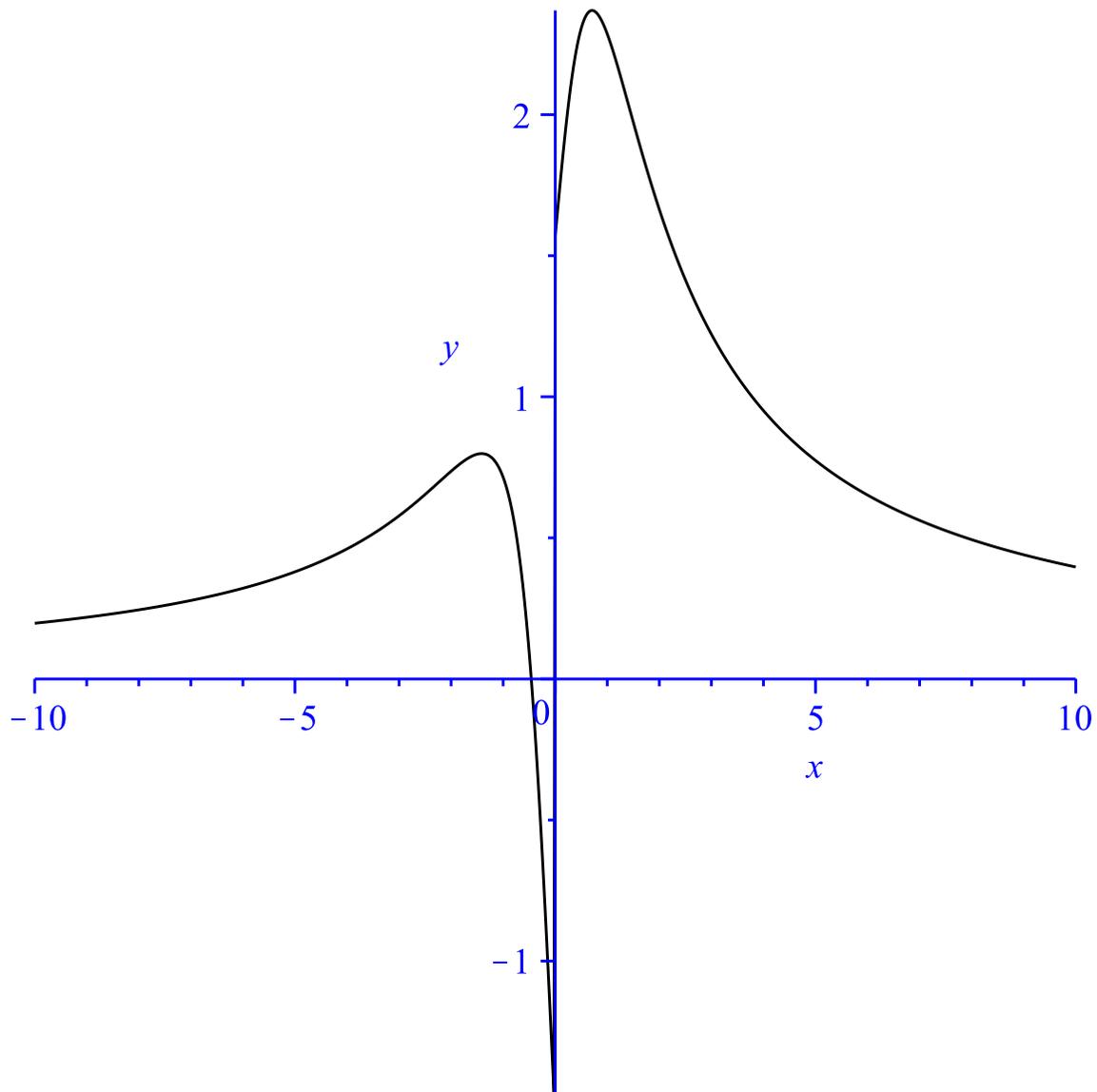


Grafico di $f(x) = \arctan(1/x) + \frac{3|x|}{1+x^2}$

Esercizio 3.a. Calcolare

$$\int \tan^2(x) dx.$$

Si ha che

$$\int \tan^2(x) dx = \int ((\tan^2(x) + 1) - 1) dx = \tan(x) - x + c.$$

Esercizio 3.b. Calcolare

$$\int \frac{3x^4 + 1}{x^2 + 1} dx.$$

Si ha che

$$\frac{3x^4 + 1}{x^2 + 1} = \frac{3(x^4 - 1) + 4}{x^2 + 1} = 3(x^2 - 1) + \frac{3}{x^2 + 1} = 3x^2 - 3 + \frac{4}{x^2 + 1}.$$

Quindi, per linearità,

$$\int \frac{3x^4 + 1}{x^2 + 1} dx = \int 3x^2 dx - \int 3 dx + 4 \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = x^3 - 3x + 4 \arctan(x) + c.$$

Esercizio 3.c. Calcolare

$$\int \frac{xe^{x^2}}{9 + e^{2x^2}} dx.$$

Poniamo $t = e^{x^2}$, allora $dt = e^{x^2} 2x dx$ e

$$\int \frac{xe^{x^2}}{9 + e^{2x^2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{3^2 + t^2} = \frac{\arctan(t/3)}{6} + c = \frac{\arctan(e^{x^2}/3)}{6} + c.$$

Esercizio 3.d. Calcolare

$$\int \frac{\log(\log(x))}{x} dx.$$

Poniamo $t = \log(x)$, allora $dt = dx/x$ e

$$\begin{aligned} \int \frac{\log(\log(x))}{x} dx &= \int \log(t) dt = t \log(t) - \int t d(\log(t)) \\ &= t \log(t) - \int 1 dt = t \log(t) - t + c \\ &= \log(x) \log(\log(x)) - \log(x) + c. \end{aligned}$$

Esercizio 3.e. Calcolare

$$\int x \log(1+x) dx.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} \int x \log(1+x) dx &= \int \log(1+x) d(x^2/2) = \frac{x^2}{2} \log(1+x) - \frac{1}{2} \int x^2 d(\log(1+x)) \\ &= \frac{x^2}{2} \log(1+x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log(1+x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2 - 1 + 1}{1+x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \log(1+x) - \frac{1}{2} \int (x-1) dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{1+x} \\ &= \frac{x^2}{2} \log(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{\log(1+x)}{2} + c. \end{aligned}$$

Si noti che la funzione $x \log(1+x)$ è definita per $1+x > 0$ e quindi nell'integrazione di $1/(x+1)$ non occorre mettere il modulo all'argomento del logaritmo.

Esercizio 3.f. Calcolare

$$\int \frac{e^{\tan(x)}(\sin(x) + \cos(x))}{\cos^3(x)} dx.$$

Poniamo $t = \tan(x)$, allora $dt = dx/\cos^2(x)$ e

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{\tan(x)}(\sin(x) + \cos(x))}{\cos^3(x)} dx &= \int \frac{e^{\tan(x)}(\tan(x) + 1)}{\cos^2(x)} dx \\ &= \int e^t(t+1) dt = \int (t+1) d(e^t) \\ &= (t+1)e^t - \int e^t dt = e^t(t+1-1) + c \\ &= e^{\tan(x)} \tan(x) + c. \end{aligned}$$

Esercizio 4.a. Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^3(x) dx.$$

Poniamo $t = \sin(x)$, allora $dt = \cos(x)dx$ e

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^3(x) dx &= \int_0^{\pi/2} \sin^2(x)(1 - \sin^2(x)) \cos(x) dx \\ &= \int_0^1 t^2(1 - t^2) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.b. Calcolare

$$\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1-x} + 6}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Si ha che

$$\begin{aligned} \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1-x} + 6}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{6}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx \\ &= \left[\frac{(1+x)^{1/2}}{1/2} + 6 \arcsin(x) \right]_0^{1/2} \\ &= 2(3/2)^{1/2} + \pi - 2 = \sqrt{6} + \pi - 2. \end{aligned}$$

Esercizio 4.c. Calcolare

$$\int_1^e \frac{1}{x(3 + \log(x))^2} dx.$$

Poniamo $t = \log(x)$, allora $dt = dx/x$ e

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{dx}{x(3 + \log(x))^2} &= \int_0^1 \frac{dt}{(3+t)^2} \\ &= \left[-\frac{1}{3+t} \right]_0^1 \\ &= -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.d. Calcolare

$$\int_0^1 (1 + 2x^2)e^{2x} dx.$$

Integrando due volte per parti, abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 + 2x^2)e^{2x} dx &= \int_0^1 (1 + 2x^2)e^{2x} d(e^{2x}/2) \\ &= \left[(1 + 2x^2) \frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} d(1 + 2x^2) \\ &= \frac{3e^2}{2} - \frac{1}{2} - 2 \int_0^1 xe^{2x} dx \\ &= \frac{3e^2}{2} - \frac{1}{2} - \int_0^1 x d(e^{2x}) \\ &= \frac{3e^2}{2} - \frac{1}{2} - [xe^{2x}]_0^1 + \int_0^1 e^{2x} dx \\ &= \frac{3e^2}{2} - \frac{1}{2} - e^2 + \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = e^2 - 1. \end{aligned}$$

Esercizio 4.e. Calcolare

$$\int_{-\pi}^{\pi} |x|(\cos(x) - 2 \sin(x)) dx.$$

Dato che la funzione $|x| \cos(x)$ è pari e la funzione $|x| \sin(x)$ è dispari,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |x|(\cos(x) - 2 \sin(x)) dx &= 2 \int_0^{\pi} x \cos(x) dx = 2 \int_0^{\pi} x d(\sin(x)) \\ &= 2 \left[x \sin(x) \right]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \sin(x) dx \\ &= 0 + 2 \left[\cos(x) \right]_0^{\pi} = -2 - 2 = -4. \end{aligned}$$

Esercizio 4.f. Calcolare

$$\int_0^{\pi} (\sin^2(x) + \cos^3(x)) dx.$$

La funzione $\cos^3(x)$ è dispari rispetto al centro $x = \pi/2$ dell'intervallo $[0, \pi]$. Così $\int_0^{\pi} \cos^3(x) dx = 0$. Allo stesso risultato si arriva integrando direttamente: $\int \cos^3(x) dx = \int (1 - \sin^2(x)) d(\sin(x)) = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + c$. Inoltre $\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$. Quindi

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} (\sin^2(x) + \cos^3(x)) dx &= \int_0^{\pi} \sin^2(x) dx + 0 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos(2x)) dx \\ &= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 4.g. Calcolare

$$\int_0^2 \log(4 + x^2) dx.$$

Integriamo per parti

$$\begin{aligned} \int_0^2 \log(4 + x^2) dx &= \left[x \log(4 + x^2) \right]_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2}{4 + x^2} dx \\ &= 2 \log(8) - 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1 + (x/2)^2} \right) dx \\ &= 6 \log(2) - 2 \left[x - 2 \arctan(x/2) \right]_0^2 \\ &= 6 \log(2) - 4 + \pi. \end{aligned}$$

Esercizio 4.h. Calcolare

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(x)} dx.$$

Poniamo $t = \sin(x)$, allora $dt = \cos(x) dx$ e

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos(x)} dx &= \int_0^{\pi/6} \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{1}{1 - t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{1 - t} + \frac{1}{1 + t} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\log \left(\frac{1 + t}{1 - t} \right) \right]_0^{1/2} = \frac{\log(3)}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 5.a. Fare un esempio di una funzione f continua e strettamente crescente in $[0, +\infty)$ tale che la funzione integrale $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ ha un asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$.

Ad esempio $f(x) = 1 - e^{-x}$ soddisfa le condizioni richieste. $f'(x) = e^{-x} > 0$ e

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt = \int_0^x (1 - e^{-t}) dt = [t + e^{-t}]_0^x = x + e^{-x} - 1.$$

Per $x \rightarrow +\infty$,

$$F(x) = x + e^{-x} - 1 = x - 1 + o(1)$$

e quindi $y = x - 1$ è l'asintoto obliquo di F per $x \rightarrow +\infty$.

Esercizio 5.b. Determinare il più grande numero reale m tale che per ogni $x > 1$,

$$e^{x/4} \geq m \frac{x-1}{x+1}.$$

Per $x > 1$, la disuguaglianza data è equivalente a

$$f(x) = e^{x/4} \cdot \frac{x+1}{x-1} \geq m$$

quindi il numero cercato m è l'estremo inferiore di $f((1, +\infty))$. Studiamo la monotonia di f in $(1, +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{e^{x/4}}{4} \cdot \frac{x+1}{x-1} + e^{x/4} \cdot \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} = \frac{e^{x/4}(x^2 - 9)}{4(x-1)^2}.$$

Quindi f è decrescente in $(1, 3]$ ed è crescente in $[3, +\infty)$. Quindi $x = 3$ è in punto di minimo assoluto di f in $(1, +\infty)$ e possiamo concludere che il più grande numero m tale che vale la disuguaglianza data è

$$m = f(3) = 2e^{3/4}.$$