

Analisi Matematica
Foglio di esercizi n. 7
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = [0, 1) \cup (1, 2]$. La funzione vale zero in $x = 0$ e $x = 2$, è negativa in $(0, 1)$, ed è positiva in $(1, 2)$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x} = \mp \infty.$$

La funzione è derivabile in $(0, 1) \cup (1, 2)$,

$$f'(x) = \frac{1}{(2x - x^2)^{1/2}(x - 1)^2}.$$

Studiando il segno di f' abbiamo che la funzione è crescente in $[0, 1)$ e in $(1, 2]$. Quindi il punto $x = 0$ è di minimo relativo mentre $x = 2$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

Inoltre

$$f''(x) = \frac{1 - 6x + 3x^2}{(2x - x^2)^{3/2}(x - 1)^3}$$

e studiando il segno di f'' abbiamo che la funzione è convessa $[1 - \sqrt{2/3}, 1)$ e in $[1 + \sqrt{2/3}, 2]$ ed è concava in $[0, 1 - \sqrt{2/3}]$ e in $(1, 1 + \sqrt{2/3}]$. I punti $x = 1 - \sqrt{2/3}$ e $x = 1 + \sqrt{2/3}$ sono dei flessi.

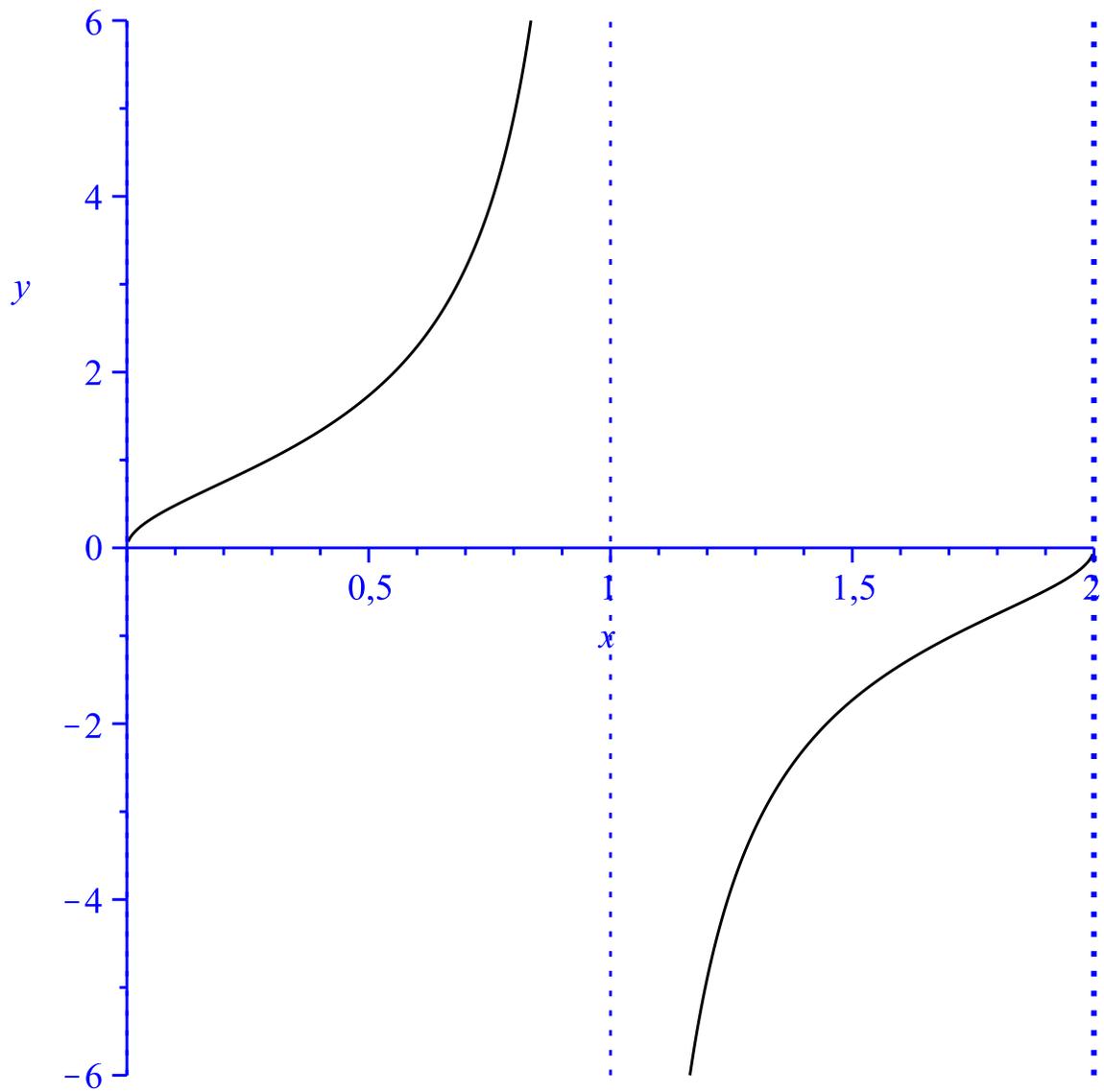


Grafico di $f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x}$

Esercizio 1.b. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{|x^2 - 4| - 4}{(x - 2)^2}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. La funzione è positiva in $(-\infty, -2\sqrt{2})$ e in $(2\sqrt{2}, +\infty)$, si annulla in $x = 0$, in $x = \pm 2\sqrt{2}$. Per $|x| \rightarrow +\infty$, la funzione tende a 1 e quindi l'asintoto a $\pm\infty$ è $y = 1$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{|x^2 - 4| - 4}{(x - 2)^2} = -\infty.$$

La derivata prima è

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{4(x-4)}{(x-2)^3} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ \frac{4x}{(x-2)^3} & \text{se } x \in (-2, 2). \end{cases}$$

La funzione non è derivabile in -2 dove c'è un punto angoloso

$$f'_-(-2) = -\frac{3}{8} \quad \text{e} \quad f'_+(-2) = \frac{1}{8}.$$

Dal segno della derivata prima si ha che f è crescente in $[-2, 0]$ e in $(2, 4]$ ed è decrescente in $(-\infty, -2]$, in $[0, 2)$ e in $[4, +\infty)$. Il punto $x = 4$ è di massimo assoluto e il punto $x = 0$ è di massimo relativo. Il punto $x = -2$ è di minimo relativo e non ci sono punti di minimo assoluto. La derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{8(x-5)}{(x-2)^4} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ -\frac{8(x+1)}{(x-2)^4} & \text{se } x \in (-2, 2). \end{cases}$$

Dal segno della derivata seconda si ha che f è convessa $[-2, -1]$ e in $[5, +\infty)$, mentre è concava in $(-\infty, -2]$, in $[-1, 2)$ e in $(2, 5]$. I punti $x = -1$ e $x = 5$ sono dei flessi.

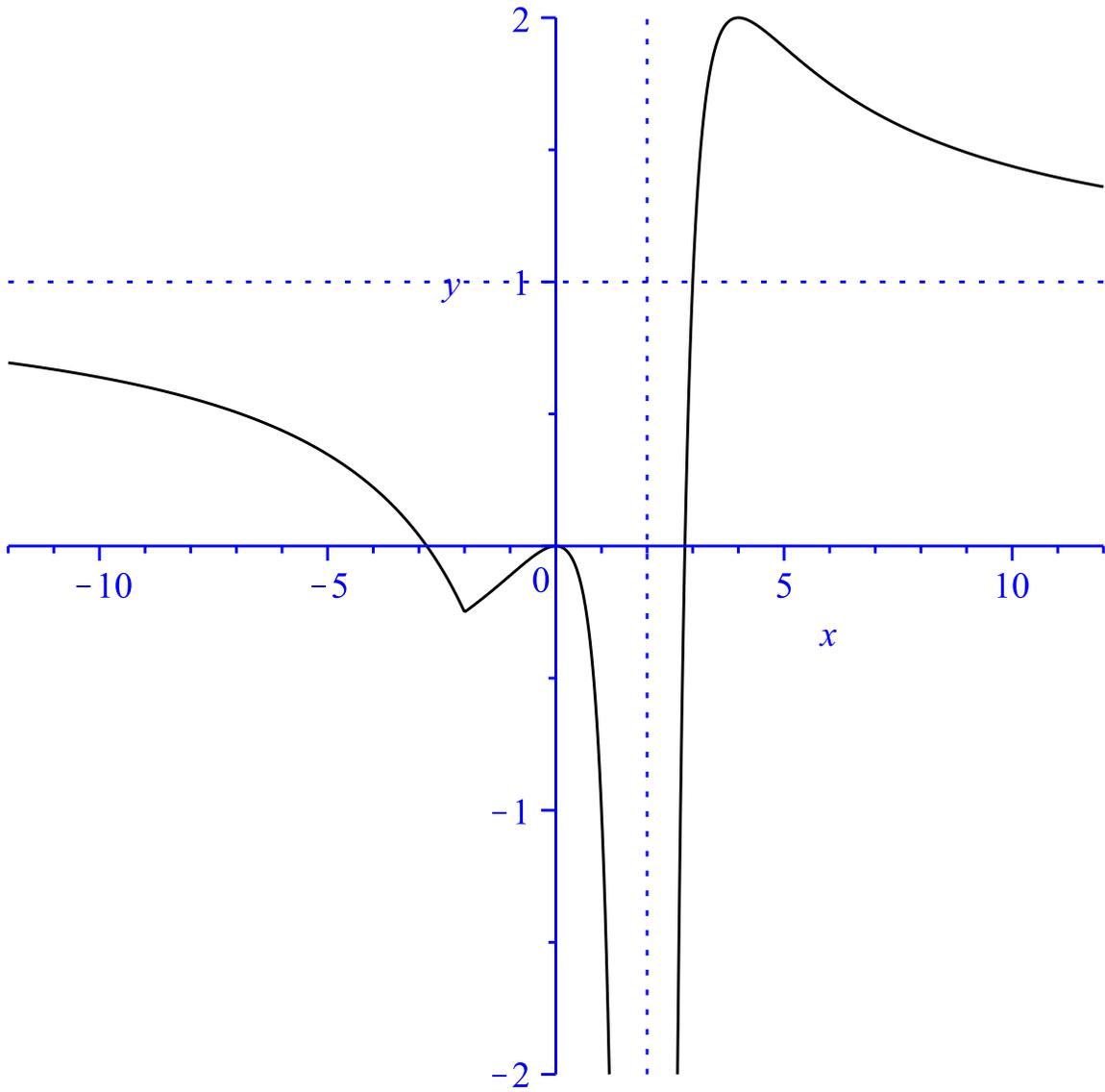


Grafico di $f(x) = \frac{|x^2 - 4| - 4}{(x - 2)^2}$

Esercizio 2.a. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 1$ di ordine $n = 3$ della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x}{2-x^2}\right).$$

Ponendo $x = t + 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \log\left(\frac{x}{2-x^2}\right) &= \log(1+t) - \log(2-(t+1)^2) \\ &= \log(1+t) - \log(1-(2t+t^2)) \\ &= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + (2t+t^2) + \frac{(2t+t^2)^2}{2} + \frac{(2t+t^2)^3}{3} + o(t^3) \\ &= (1+2)t + \left(-\frac{1}{2} + 1 + 2\right)t^2 + \left(\frac{1}{3} + 2 + \frac{8}{3}\right)t^3 + o(t^3) \\ &= 3t + \frac{5t^2}{2} + 5t^3 + o(t^3). \end{aligned}$$

Quindi

$$T_3(x) = 3(x-1) + \frac{5(x-1)^2}{2} + 5(x-1)^3.$$

Esercizio 2.b. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 4$ della funzione

$$f(x) = \frac{e^{-x^2}}{(1-2x)(x^2+1)}.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{e^{-x^2}}{(1-2x)(x^2+1)} &= \left(1-x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)\right)(1+2x + (2x)^2 + (2x)^3 + (2x)^4 + o(x^4)) \\ &\quad \cdot (1-x^2 + x^4 + o(x^4)) \\ &= 1 + 2x + (4-1-1)x^2 + (8-2-2)x^3 \\ &\quad + \left(\frac{1}{2} + 16 + 1 - 4 + 1 - 4\right)x^4 + o(x^4) \\ &= 1 + 2x + 2x^2 + 4x^3 + \frac{21x^4}{2} + o(x^4). \end{aligned}$$

Quindi

$$T_4(x) = 1 + 2x + 2x^2 + 4x^3 + \frac{21x^4}{2}.$$

Esercizio 2.c. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 5$ della funzione

$$f(x) = \frac{\log(\cos(x))}{1 + \sin^2(x)}.$$

Dato che la funzione è pari, i coefficienti delle potenze dispari di x sono zero. Basta così sviluppare fino all'ordine 4:

$$\begin{aligned} \frac{\log(\cos(x))}{1 + \sin^2(x)} &= \frac{\log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)}{1 + (x + o(x))^2} \\ &= \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 + o(x^4)}{1 + x^2 + o(x^2)} \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)\right) \cdot (1 - x^2 + o(x^2)) \\ &= -\frac{x^2}{2} + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{2}\right)x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Quindi

$$T_5(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{12}.$$

Esercizio 2.d. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine $n = 4$ della funzione

$$f(x) = \frac{\arctan(x - x^2)}{\sqrt{1 + 3x^2}}.$$

Abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{\arctan(x - x^2)}{\sqrt{1 + 3x^2}} &= \left((x - x^2) - \frac{(x - x^2)^3}{3} + o(x^4)\right) \left(1 - \frac{3x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= \left(x - x^2 - \frac{x^3}{3} + x^4 + o(x^4)\right) \left(1 - \frac{3x^2}{2} + o(x^3)\right) \\ &= x - x^2 + \left(-\frac{1}{3} - \frac{3}{2}\right)x^3 + \left(1 + \frac{3}{2}\right)x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

Quindi

$$T_4(x) = x - x^2 - \frac{11x^3}{6} + \frac{5x^4}{2}.$$

Esercizio 2.e. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 1$ di ordine $n = 3$ della funzione

$$f(x) = x^x.$$

Ponendo $x = t + 1$, abbiamo che

$$\begin{aligned} x^x &= \exp((1+t) \log(1+t)) \\ &= \exp\left((1+t)\left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)\right)\right) \\ &= \exp\left(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{12} + o(t^4)\right) \\ &= 1 + \left(t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right) + \frac{1}{2!}\left(t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{3!}(t + o(t))^3 + o(t^3) \\ &= 1 + t + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)t^2 + \left(-\frac{1}{6} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\right)t^3 + o(t^3) \\ &= 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3). \end{aligned}$$

Quindi

$$T_4(x) = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{2}.$$

Esercizio 2.f. Determinare il polinomio di Taylor centrato in $x_0 = 3\pi/2$ di ordine $n = 4$ della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 + \cos^2(x)}.$$

Ponendo $x = t + 3\pi/2$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + \cos^2(x)} &= \sqrt{1 + \cos^2(3\pi/2 + t)} = \sqrt{1 + \sin^2(t)} \\ &= \sqrt{1 + \left(t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)} \\ &= 1 + \frac{t^2 - \frac{t^4}{3} + o(t^4)}{2} - \frac{(t^2 + o(t^2))^2}{8} + o(t^4) \\ &= 1 + \frac{t^2}{2} - \frac{7t^4}{24} + o(t^4). \end{aligned}$$

Quindi

$$T_4(x) = 1 + \frac{(x - \frac{3\pi}{2})^2}{2} - \frac{7(x - \frac{3\pi}{2})^4}{24} + o((x - 3\pi/2)^4).$$

Esercizio 3.a. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \arcsin(x) - x^2}{\sqrt{1 + 3x^4} - 1}.$$

Per $x \rightarrow 0$,

$$\arcsin(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \quad \text{e} \quad \sqrt{1 + 3x^4} = 1 + \frac{3x^4}{2} + o(x^4).$$

Quindi

$$\begin{aligned} \frac{x \arcsin(x) - x^2}{\sqrt{1 + 3x^4} - 1} &= \frac{x \left(x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) - x^2}{1 + \frac{3x^4}{2} + o(x^4) - 1} \\ &= \frac{\frac{x^4}{6} + o(x^4)}{\frac{3x^4}{2} + o(x^4)} \\ &= \frac{\frac{1}{6} + o(1)}{\frac{3}{2} + o(1)} \rightarrow \frac{1/6}{3/2} = \frac{1}{9}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.b. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^x - x}{\log^3(x)} - \frac{1}{\log(x)} \right).$$

Per $x \rightarrow 1$, $t = x - 1 \rightarrow 0$ e $\log(x) = \log(1 + t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$ Inoltre dall'es. 2.e, $x^x = 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3)$. Quindi

$$\begin{aligned} \frac{x^x - x}{\log^3(x)} - \frac{1}{\log(x)} &= \frac{x^x - x - \log^2(x)}{\log^3(x)} \\ &= \frac{1 + t + t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3) - (1 + t) - \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right)^2}{(t + o(t))^3} \\ &= \frac{t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3) - \left(t - \frac{t^2}{2} + o(t^2) \right)^2}{t^3 + o(t^3)} \\ &= \frac{t^2 + \frac{t^3}{2} + o(t^3) - (t^2 - t^3 + o(t^3))}{t^3 + o(t^3)} \\ &= \frac{\frac{3t^3}{2} + o(t^3)}{t^3 + o(t^3)} \\ &= \frac{\frac{3}{2} + o(1)}{1 + o(1)} \rightarrow \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.c. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \cos(5/x) - (x^2 - x - 3)e^{1/x}}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x}.$$

Notiamo che per $x \rightarrow +\infty$,

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right)^x \rightarrow e^{-1}.$$

Inoltre ponendo $t = 1/x \rightarrow 0^+$,

$$\begin{aligned} x^2 \cos(5/x) - (x^2 - x - 3)e^{1/x} &= \frac{1}{t^2} (\cos(5t) - (1 - t - 3t^2)e^t) \\ &= \frac{1}{t^2} \left(1 - \frac{25t^2}{2} + o(t^2) - (1 - t - 3t^2) \left(1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right)\right) \\ &= \frac{\left(-\frac{25}{2} + 1 - \frac{1}{2} + 3\right)t^2 + o(t^2)}{t^2} \rightarrow -9. \end{aligned}$$

Quindi il limite richiesto vale $-9e$.

Esercizio 3.d. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x) + \log(1 - x + x^2))^{1/x^2}.$$

Per $x \rightarrow 0$,

$$\begin{aligned} (1 + \sin(x) + \log(1 - x + x^2))^{1/x^2} &= \left(1 + (x + o(x^2)) + (-x + x^2) - \frac{(-x + x^2)^2}{2} + o(x^2)\right)^{1/x^2} \\ &= \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^{1/x^2} \\ &= \exp\left(\frac{1}{x^2} \log\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2} + o(1)\right) \rightarrow \sqrt{e}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.e. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \left(\frac{2}{\tan(x) - 1} - \frac{1}{\sqrt{2} \sin(x) - 1} \right).$$

Sia $t = x - \pi/4$, allora

$$\sqrt{2} \sin(x) = \sqrt{2} \sin(t + \pi/4) = \sin(t) + \cos(t) = 1 + t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

e

$$\begin{aligned} \tan(x) &= \tan(t + \pi/4) = \frac{1 + \tan(t)}{1 - \tan(t)} = (1 + t + o(t^2))(1 - (t + o(t^2)))^{-1} \\ &= (1 + t + o(t^2))(1 + (t + o(t^2)) + (t + o(t^2))^2 + o(t^2)) \\ &= (1 + t + o(t^2))(1 + t + t^2 + o(t^2)) = 1 + 2t + 2t^2 + o(t^2). \end{aligned}$$

Così, per $t \rightarrow 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{2}{\tan(x) - 1} - \frac{1}{\sqrt{2} \sin(x) - 1} &= \frac{2}{2t + 2t^2 + o(t^2)} - \frac{1}{t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)} \\ &= \frac{2t - t^2 - 2t - 2t^2 + o(t^2)}{2t^2 + o(t^2)} \rightarrow -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.f. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\cos(2 \sin(x)) - \cos(2x))}{x^5 + x^2 - \sin(x^2) - x^5 e^{-x}}.$$

Per $x \rightarrow 0$, abbiamo che,

$$\begin{aligned} \cos(2 \sin(x)) &= \cos\left(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(2x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(4x^2 - \frac{4x^4}{3} + o(x^4)\right) + \frac{1}{24}\left(16x^4 + o(x^4)\right) + o(x^4) \\ &= 1 - 2x^2 + \frac{4x^4}{3} + o(x^4). \end{aligned}$$

Così

$$\begin{aligned} \frac{x^2(\cos(2 \sin(x)) - \cos(2x))}{x^5 + x^2 - \sin(x^2) - x^5 e^{-x}} &= \frac{x^2\left(1 - 2x^2 + \frac{4x^4}{3} - 1 + \frac{(2x)^2}{2} - \frac{(2x)^4}{24} + o(x^4)\right)}{x^5 + x^2 - (x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)) - x^5(1 - x + o(x))} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\right)x^6 + o(x^6)}{\left(\frac{1}{6} + 1\right)x^6 + o(x^6)} \rightarrow \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

Esercizio 3.g. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \log^2(\sin(x) + \frac{1}{x})}{\sqrt{1 + 2x \log(x)} - 1 - x \log(x)}.$$

Per $x \rightarrow 0^+$, il numeratore è

$$\begin{aligned} x^2 \log^2(\sin(x) + 1/x) &= x^2 (-\log(x) + \log(x \sin(x) + 1))^2 \\ &= x^2 \log^2(x) \left(-1 + \frac{\log(x \sin(x) + 1)}{\log(x)} \right)^2 \\ &= x^2 \log^2(x) \left(-1 + \frac{\log(1 + x^2 + o(x^2))}{\log(x)} \right)^2 \\ &= x^2 \log^2(x) \left(-1 + \frac{x^2 + o(x^2)}{\log(x)} \right)^2 \\ &= x^2 \log^2(x) (-1 + o(1))^2 \\ &= x^2 \log^2(x) (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Dato che $x \log(x) \rightarrow 0$, il denominatore è

$$\begin{aligned} \sqrt{1 + 2x \log(x)} - 1 - x \log(x) &= -\frac{(2x \log(x))^2}{8} + o(x^2 \log^2(x)) \\ &= -\frac{x^2 \log^2(x)}{2} + o(x^2 \log^2(x)). \end{aligned}$$

Quindi per $x \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \frac{x^2 \log^2(\sin(x) + \frac{1}{x})}{\sqrt{1 + 2x \log(x)} - 1 - x \log(x)} &= \frac{x^2 \log^2(x) (1 + o(1))}{-\frac{x^2 \log^2(x)}{2} + o(x^2 \log^2(x))} \\ &= \frac{1 + o(1)}{-\frac{1}{2} + o(1)} \rightarrow -2. \end{aligned}$$

Esercizio 3.h. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^2(x) (x + 4)^x}{(x + \log(x))^x - x^{x+1}}.$$

Per $x \rightarrow +\infty$, $\log^n(x)/x \rightarrow 0$ per ogni $n \geq 0$ e quindi

$$\begin{aligned} (x + \log(x))^x &= x^x \exp \left(x \log \left(1 + \frac{\log(x)}{x} \right) \right) \\ &= x^x \exp \left(x \left(\frac{\log(x)}{x} - \frac{\log^2(x)}{2x^2} + o\left(\frac{\log^2(x)}{x^2} \right) \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^x \exp \left(\log(x) - \frac{\log^2(x)}{2x} + o\left(\frac{\log^2(x)}{x}\right) \right) \\
&= x^{x+1} \exp \left(-\frac{\log^2(x)}{2x} + o\left(\frac{\log^2(x)}{x}\right) \right) \\
&= x^{x+1} \left(1 - \frac{\log^2(x)}{2x} + o\left(\frac{\log^2(x)}{x}\right) \right)
\end{aligned}$$

da cui segue che

$$\begin{aligned}
\frac{\log^2(x) (x+4)^x}{(x+\log(x))^x - x^{x+1}} &= \frac{\log^2(x) x^x (1 + \frac{4}{x})^x}{x^{x+1} \left(1 - \frac{\log^2(x)}{2x} + o\left(\frac{\log^2(x)}{x}\right) \right) - x^{x+1}} \\
&= \frac{\frac{\log^2(x)}{x} (1 + \frac{4}{x})^x}{-\frac{\log^2(x)}{2x} + o\left(\frac{\log^2(x)}{x}\right)} \\
&= \frac{(1 + \frac{4}{x})^x}{-\frac{1}{2} + o(1)} \rightarrow -2e^4.
\end{aligned}$$

Esercizio 4.a. Determinare quale punto P lungo la parabola $y = 1 + x^2$ ha distanza minima dal punto $Q = (5, 0)$

Un generico punto P lungo la parabola $y = 1 + x^2$ ha coordinate $(x, 1 + x^2)$ con x che varia in \mathbb{R} . La funzione distanza di P da Q è

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{(x-5)^2 + (1+x^2-0)^2} \\ &= \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 1 + 2x^2 + x^4} \\ &= \sqrt{x^4 + 3x^2 - 10x + 26}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ in quanto

$$(x-5)^2 + (1+x^2)^2 \geq (1+x^2)^2 \geq 1 > 0.$$

La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 6x - 10}{2\sqrt{x^4 + 3x^2 - 10x + 26}}.$$

Si nota che il numeratore si annulla in 1 dividendo per $(x-1)$ si ottiene la fattorizzazione

$$4x^3 + 6x - 10 = 2(x-1)(2x^2 + 2x + 5)$$

Dato che il $2x^2 + 2x + 5 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ se ne deduce che f' è positiva in $(1, +\infty)$ e negativa in $(-\infty, 1)$. Dunque f è crescente in $[1, +\infty)$ e decrescente in $(-\infty, 1]$ e possiamo concludere che $x = 1$ è un punto di minimo assoluto per la funzione distanza f .

Così il punto P di minima distanza da Q è $(1, 1 + 1^2) = (1, 2)$, il valore della distanza minima è $f(1) = \sqrt{20}$.

Esercizio 4.b. Determinare per ogni $b \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$\frac{b}{x} = \exp\left(\frac{|x-1|}{x}\right).$$

L'equazione data è equivalente a $f(x) = b$ dove

$$f(x) = x \exp\left(\frac{|x-1|}{x}\right).$$

Il dominio di f è $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $x \rightarrow +\infty$,

$$f(x) = x e^{(x-1)/x} = x e \cdot e^{-1/x} = x e (1 - 1/x + o(1/x)) = e(x-1) + o(1).$$

Analogamente per $x \rightarrow -\infty$,

$$f(x) = x e^{(1-x)/x} = x e^{-1} \cdot e^{1/x} = x e^{-1} (1 + 1/x + o(1/x)) = e^{-1}(x+1) + o(1).$$

Quindi gli asintoti a $+\infty$ e $-\infty$ sono rispettivamente $y = e(x-1)$ e $y = e^{-1}(x+1)$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \exp\left(\frac{|x-1|}{x}\right) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} x \exp\left(\frac{|x-1|}{x}\right) = 0.$$

La derivata è

$$f'(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{x-1}{x}\right) \frac{x+1}{x} & \text{se } x \in (1, +\infty), \\ \exp\left(\frac{1-x}{x}\right) \frac{x-1}{x} & \text{se } x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1). \end{cases}$$

Quindi f è crescente in $(-\infty, 0)$ e in $[1, +\infty)$ ed è decrescente in $(0, 1]$. La funzione non è derivabile in 1 dove c'è un punto angoloso con

$$f'_-(1) = 0 \quad \text{e} \quad f'_+(1) = 2.$$

Il punto $x = 1$ è di minimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto.

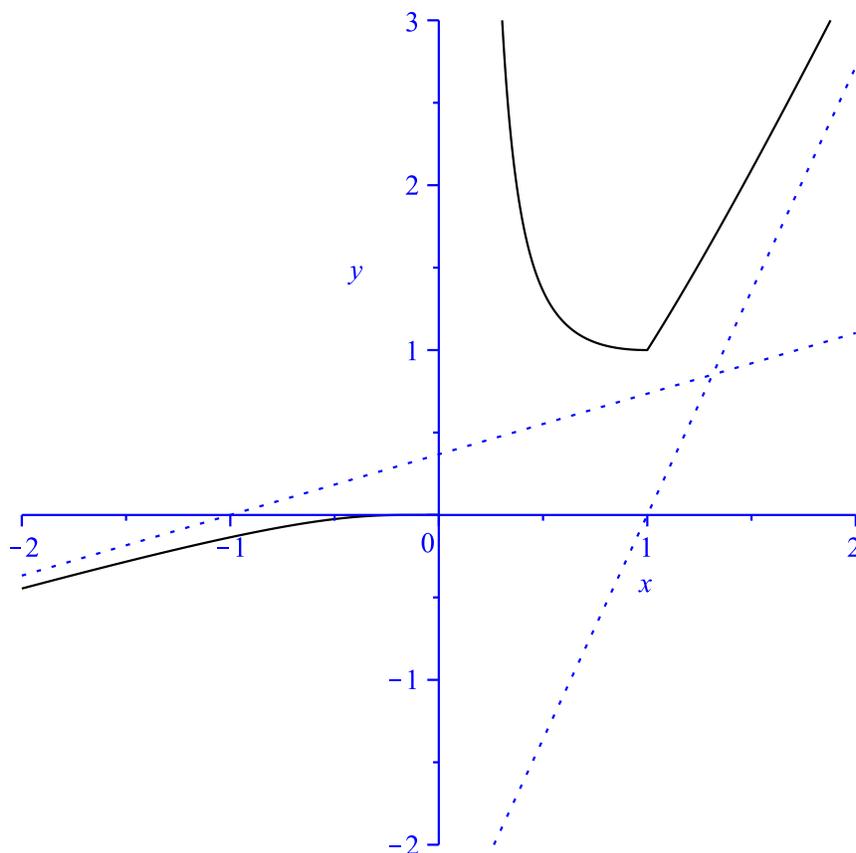


Grafico di $f(x) = x \exp\left(\frac{|x-1|}{x}\right)$

In base al grafico di f possiamo concludere che il numero di soluzioni dell'equazione data è

$$\begin{cases} 2 & \text{se } b > 1 \text{ con } x_1 \in (0, 1) \text{ e } x_2 \in (1, +\infty), \\ 1 & \text{se } b = 1 \text{ con } x_1 = 1, \text{ oppure se } b < 0, \text{ con } x_1 \in (-\infty, 0), \\ 0 & \text{se } 0 \leq b < 1. \end{cases}$$