

Analisi Matematica

Foglio di esercizi n. 5

SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \log(1 + \frac{1}{x}) + 4 \log(1 + 2^x)}{\sqrt{1 + x^2} + x}.$$

Per $x \rightarrow +\infty$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{3 \log(1 + \frac{1}{x}) + 4 \log(1 + 2^x)}{\sqrt{1 + x^2} + x} &= \frac{3 \log(1 + \frac{1}{x}) + 4 \log(2^x(1 + 2^{-x}))}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\ &= \frac{3 \log(1 + \frac{1}{x}) + 4 \log(2)x + \log(1 + 2^{-x})}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} \\ &= \frac{3 \frac{\log(1 + \frac{1}{x})}{x} + 4 \log(2) + \frac{\log(1 + 2^{-x})}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} \\ &\rightarrow \frac{3 \cdot 0 + 4 \log(2) + 0}{1 + 1} = 2 \log(2). \end{aligned}$$

Esercizio 1.b. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 \log(1 + \frac{1}{x}) + 4 \log(1 + 2^x)}{\sqrt{1 + x^2} + x}.$$

Per $x \rightarrow -\infty$ abbiamo che

$$\begin{aligned} \frac{3 \log(1 + \frac{1}{x}) + 4 \log(1 + 2^x)}{\sqrt{1 + x^2} + x} &= \frac{3 \log(1 + \frac{1}{x}) + 4 \log(1 + 2^x)}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)} \\ &= - \frac{3 \frac{\log(1 + 1/x)}{1/x} + 4 x 2^x \frac{\log(1 + 2^x)}{2^x}}{\frac{\sqrt{1 + 1/x^2} - 1}{1/x^2}} \\ &\rightarrow - \frac{3 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \cdot 1}{1/2} = -6. \end{aligned}$$

Esercizio 2.a. Determinare i punti di discontinuità e i punti di non derivabilità al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - 4| + b & \text{se } x < 3 \\ ax & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$

Per la continuità basta studiare cosa accade in $x = 3$. Affinché f sia continua dobbiamo imporre che

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} |x^2 - 4| + b = \lim_{x \rightarrow 3^+} ax = f(3) = 3a$$

ovvero che $5 + b = 3a$.

Per la derivabilità, osserviamo che il ramo destro è regolare, mentre il ramo sinistro della funzione ha due punti di non derivabilità, ossia dei punti angolosi in $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$:

$$f'_-(-2) = -4 \quad \text{e} \quad f'_+(-2) = -4 \quad , \quad f'_-(2) = -4 \quad \text{e} \quad f'_+(2) = 4.$$

Affinché f sia derivabile in $x = 3$, è necessario che la funzione sia continua in $x = 3$, ossia $3a = 5 + b$, e

$$a = f'_+(3) = f'_-(3) = 2 \cdot 3 = 6.$$

Quindi f è derivabile in 3 se e solo se $a = 6$ e $b = 13$.

Esercizio 2.b. Determinare i punti di discontinuità e i punti di non derivabilità al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2 \arcsin(x) & \text{se } x \in [-1, 1] \\ ax + bx^2 & \text{se } x \in (1, 2) \\ \sqrt{|x-3|} & \text{se } x \in [2, 4] \end{cases}$$

In questo caso la funzione è definita sull'intervallo $[-1, 4]$.

In $[-1, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 4]$ la funzione è continua. In $x = 1$, affinché la funzione sia continua si deve avere che

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} ax + bx^2 = a + b = f(1) = \pi.$$

In $x = 2$, per la continuità dobbiamo avere che

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} ax + bx^2 = 2a + 4b = f(2) = 1.$$

Derivabilità. La derivata di $2 \arcsin(x)$ è $\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$, che non è definita in $x = \pm 1$ e quindi in tali punti f non è derivabile. In particolare in $x = 1$ la derivata destra è $a + 2b$ e quindi $x = 1$ è un punto angoloso.

Nel punto $x = 2$, per la derivabilità è necessario che $2a + 4b = 1$ e

$$f'_-(2) = a + 4b = f'_+(2) = -\frac{1}{2\sqrt{3-2}} = -\frac{1}{2}.$$

Quindi f è derivabile in 2 se e solo se $a = 3/2$ e $b = -1/2$.

Infine in $x = 3$ la funzione ha ancora un punto di non derivabilità, ossia una cuspide:

$$f'_-(3) = -\infty \quad \text{e} \quad f'_+(3) = +\infty.$$

Esercizio 3.a. Determinare la retta tangente al grafico di

$$f(x) = \frac{\log(x)}{2^x + x^2}$$

nel punto $(1, f(1))$.

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{2^x + x^2 - x \log(x)(2^x \log(2) + 2x)}{x(2^x + x^2)^2}$$

e quindi $f'(1) = 1/3$. Inoltre $f(1) = 0$. Allora la retta tangente cercata è

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1) = \frac{x - 1}{3}.$$

Esercizio 3.b. Determinare la retta tangente al grafico di

$$f(x) = \frac{\pi^2 \sqrt{3 + e^x}}{\arctan(x + 1)}$$

nel punto $(0, f(0))$.

La derivata della funzione è

$$f'(x) = \frac{\pi^2}{\arctan^2(x + 1)} \left(\frac{e^x \arctan(x + 1)}{2\sqrt{3 + e^x}} - \frac{\sqrt{3 + e^x}}{1 + (x + 1)^2} \right)$$

e quindi $f'(0) = \pi - 16$. Inoltre $f(0) = 8\pi$. Allora la retta tangente cercata è

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = (\pi - 16)x + 8\pi.$$

Esercizio 4.a. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x^{1/x}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

Il dominio è $D = (0, +\infty)$. I limiti agli estremi di D sono

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\log(x)/x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\log(x)/x} = 1$$

quindi $y = 1$ è l'asintoto per $x \rightarrow +\infty$.

Per $x > 0$ si ha che

$$f'(x) = \frac{x^{1/x}(1 - \log(x))}{x^2}$$

e quindi f è crescente in $(0, e]$ ed è decrescente $[e, +\infty)$. Inoltre $x = e$ è un punto di massimo assoluto. Non ci sono punti di minimo relativo.

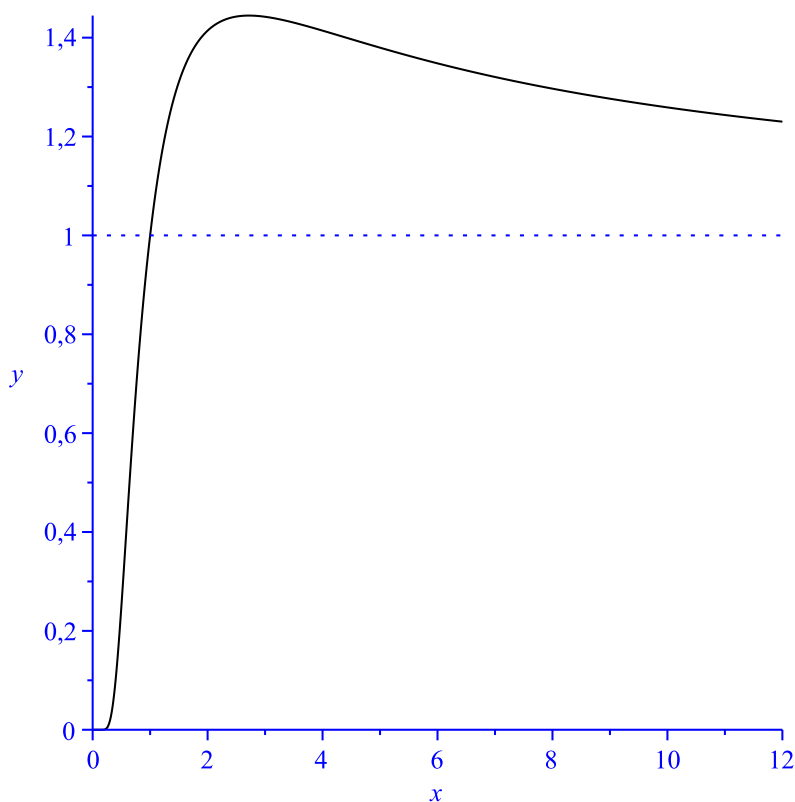


Grafico di $f(x) = x^{1/x}$

Esercizio 4.b. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1)$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti e i punti di non derivabilità.

La funzione è pari con dominio $D = \mathbb{R}$. I limiti agli estremi di D sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

quindi $y = 0$ è l'asintoto per $x \rightarrow \pm\infty$. Per $x \in \mathbb{R}$ si ha che

$$f'(x) = -2e^{-x^2}x(x^2 - 1)(x^2 - 4).$$

Così,

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1)(x^2 - 4) \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [-1, 0] \cup [1, 2]$$

e dunque f è crescente in $(-\infty, -2]$, in $[-1, 0]$ e in $[1, 2]$, ed è decrescente in $[-2, -1]$, in $[0, 1]$ e in $[2, +\infty)$. Confrontando i valori nei punti stazionari abbiamo che i punti $x = \pm 1$ sono di minimo assoluto mentre i punti $x = \pm 2$ sono di massimo relativo e $x = 0$ è un punto di massimo assoluto.

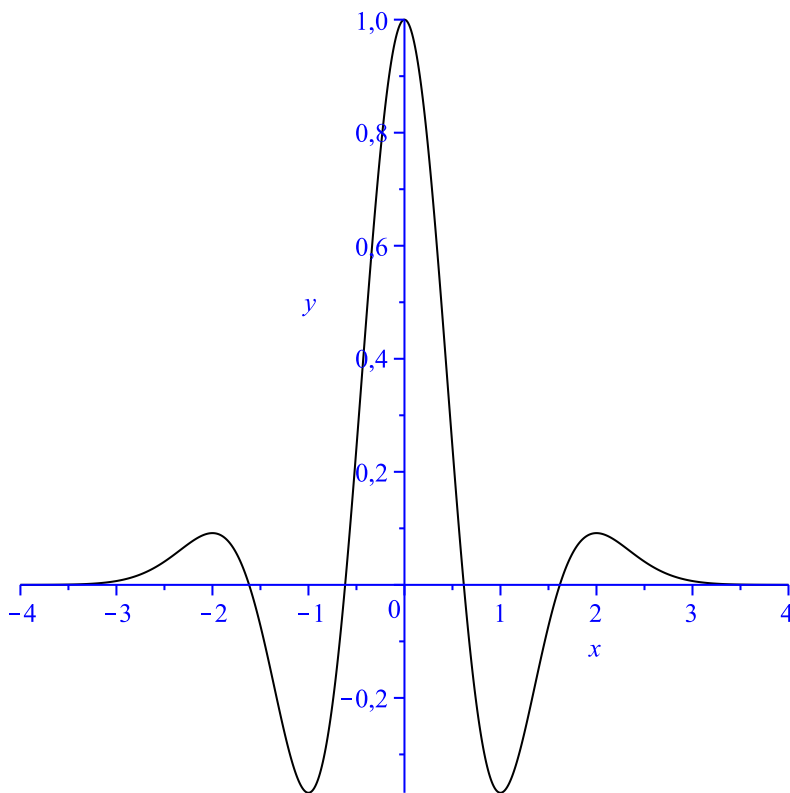


Grafico di $f(x) = e^{-x^2}(x^4 - 3x^2 + 1)$

Esercizio 5.a. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = [0, 1) \cup (1, 2]$. La funzione vale zero in $x = 0$ e $x = 2$, è negativa in $(0, 1)$, ed è positiva in $(1, 2)$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x} = \mp \infty.$$

La funzione è derivabile in $(0, 1) \cup (1, 2)$,

$$f'(x) = \frac{1}{(2x - x^2)^{1/2}(x - 1)^2}.$$

Studiando il segno di f' abbiamo che la funzione è crescente in $[0, 1)$ ed è decrescente in $(1, 2]$. Inoltre

$$f''(x) = \frac{1 - 6x + 3x^2}{(2x - x^2)^{3/2}(x - 1)^3}$$

e studiando il segno di f'' abbiamo che la funzione è convessa $[1 - \sqrt{2/3}, 1)$ e in $[1 + \sqrt{2/3}, 2]$ ed è concava in $[0, 1 - \sqrt{2/3}]$ e in $(1, 1 + \sqrt{2/3}]$. Il punto $x = 0$ è di minimo relativo mentre $x = 2$ è un punto di massimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto. I punti $x = 1 - \sqrt{2/3}$ e $x = 1 + \sqrt{2/3}$ sono dei flessi.

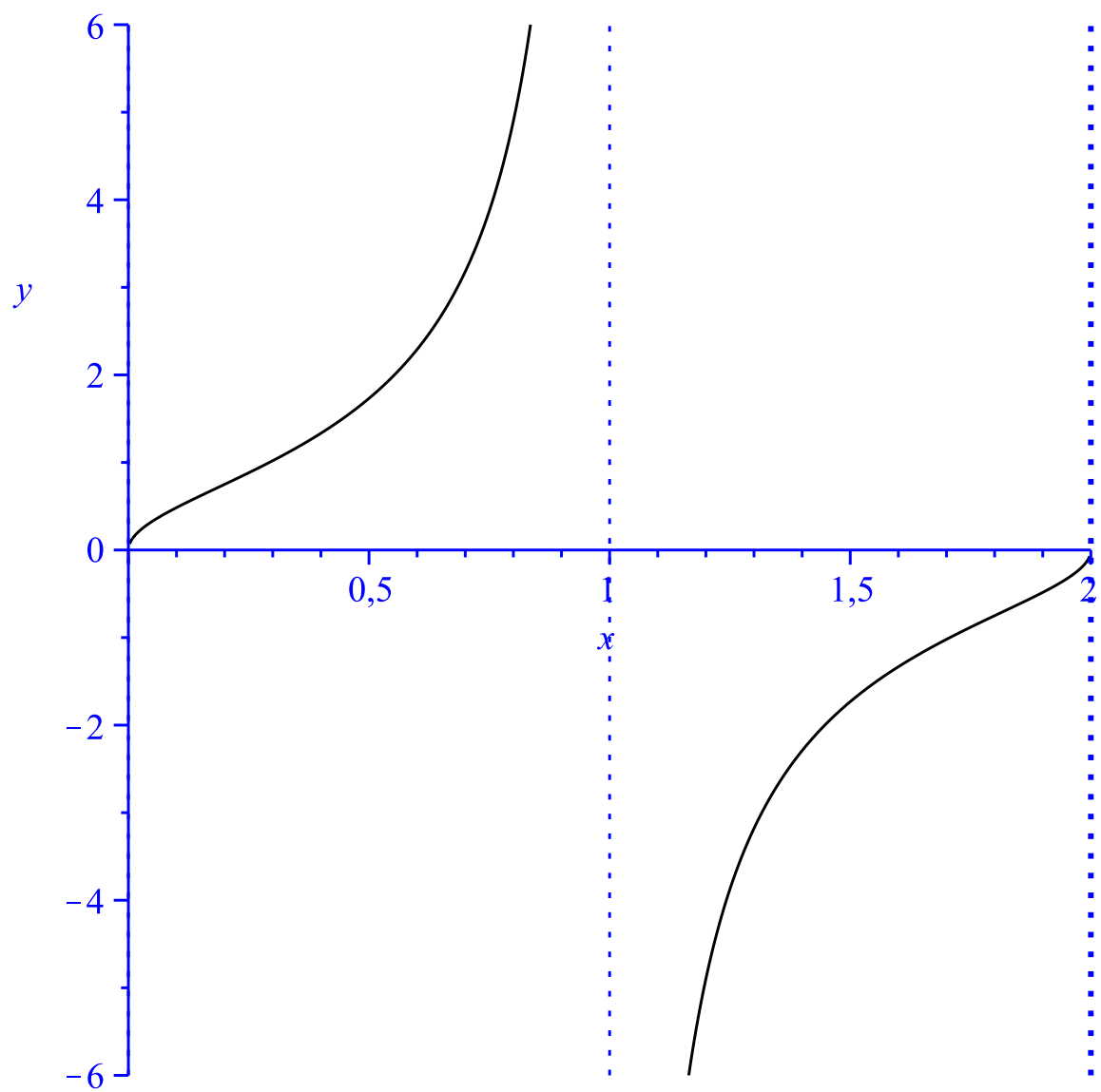


Grafico di $f(x) = \frac{\sqrt{2x - x^2}}{1 - x}$

Esercizio 5.b. Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{|x^2 - 4| - 4}{(x - 2)^2}$$

specificando il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, i punti di non derivabilità, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. La funzione è positiva in $(-\infty, -2\sqrt{2})$ e in $(2\sqrt{2}, +\infty)$, si annulla in $x = 0$, in $x = \pm 2\sqrt{2}$. Per $|x| \rightarrow +\infty$, la funzione tende a 1 e quindi l'asintoto a $\pm\infty$ è $y = 1$. Inoltre

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{|x^2 - 4| - 4}{(x - 2)^2} = -\infty.$$

La derivata prima è

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{4(x-4)}{(x-2)^3} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ \frac{4x}{(x-2)^3} & \text{se } x \in (-2, 2). \end{cases}$$

La funzione non è derivabile in -2 dove c'è un punto angoloso

$$f'_-(-2) = -\frac{3}{8} \quad \text{e} \quad f'_+(-2) = \frac{1}{8}.$$

Dal segno della derivata prima si ha che f è crescente in $[-2, 0]$ e in $(2, 4]$ ed è decrescente in $(-\infty, -2]$, in $[0, 2)$ e in $[4, +\infty)$. Il punto $x = 4$ è di massimo assoluto e il punto $x = 0$ è di massimo relativo. Il punto $x = -2$ è di minimo relativo e non ci sono punti di minimo assoluto. La derivata seconda è

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{8(x-5)}{(x-2)^4} & \text{se } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty), \\ -\frac{8(x+1)}{(x-2)^4} & \text{se } x \in (-2, 2). \end{cases}$$

Dal segno della derivata seconda si ha che f è convessa $[-2, -1]$ e in $[5, +\infty)$, mentre è concava in $(-\infty, -2]$, in $[-1, 2)$ e in $(2, 5]$. I punti $x = -1$ e $x = 5$ sono dei flessi.

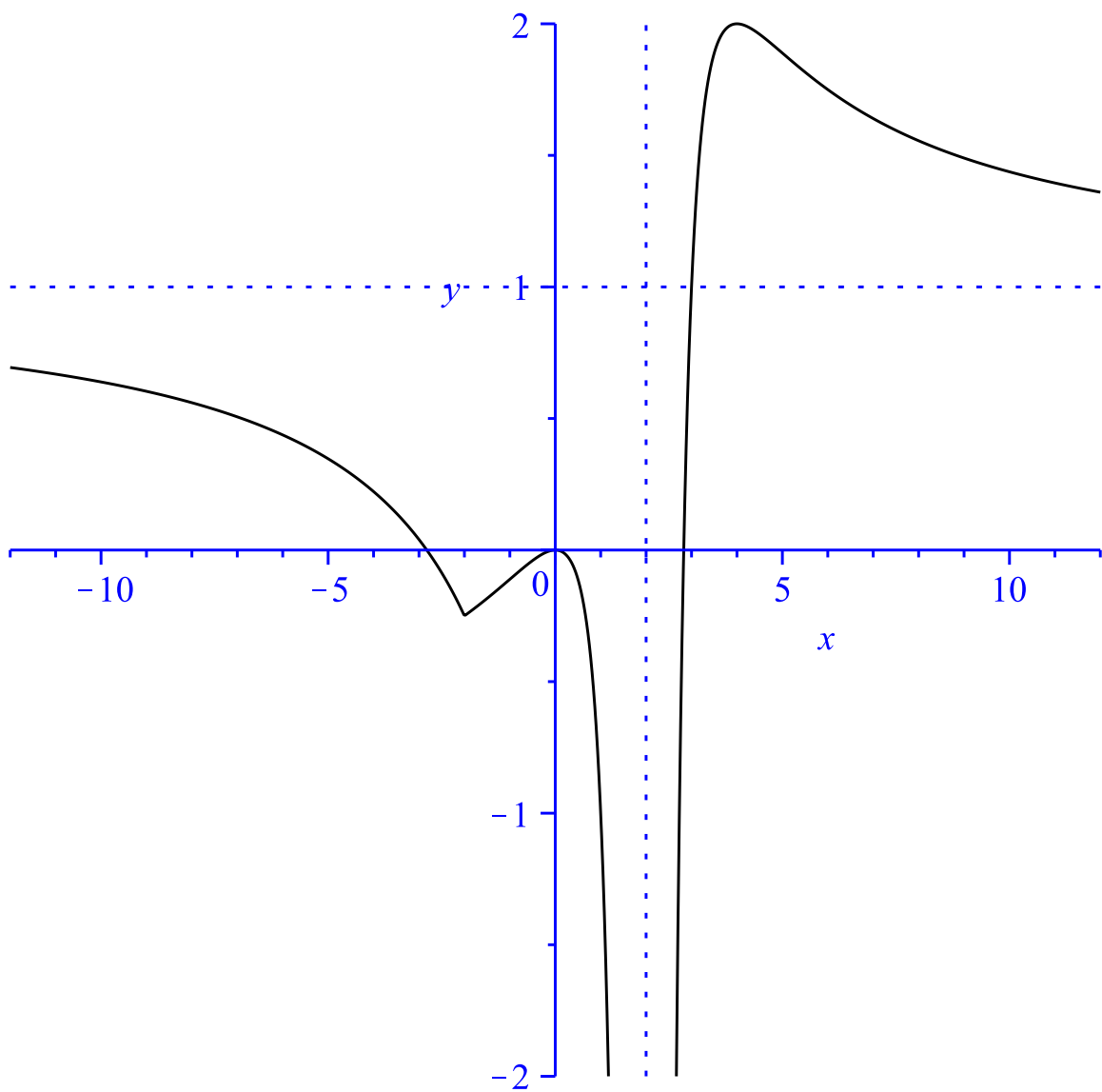


Grafico di $f(x) = \frac{|x^2 - 4| - 4}{(x - 2)^2}$

Esercizio 6.a. Fare un esempio di una funzione derivabile e strettamente crescente in $\mathbb{R}$ con infiniti punti stazionari.

La funzione

$$f(x) = x + \sin(x)$$

ha le proprietà richieste. f è derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata è

$$f'(x) = 1 + \cos(x).$$

f ha infiniti punti stazionari: $x_k = \pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ perché $f'(x_k) = 0$. Inoltre altrove f' è positiva e quindi f è strettamente crescente in $\mathbb{R}$.

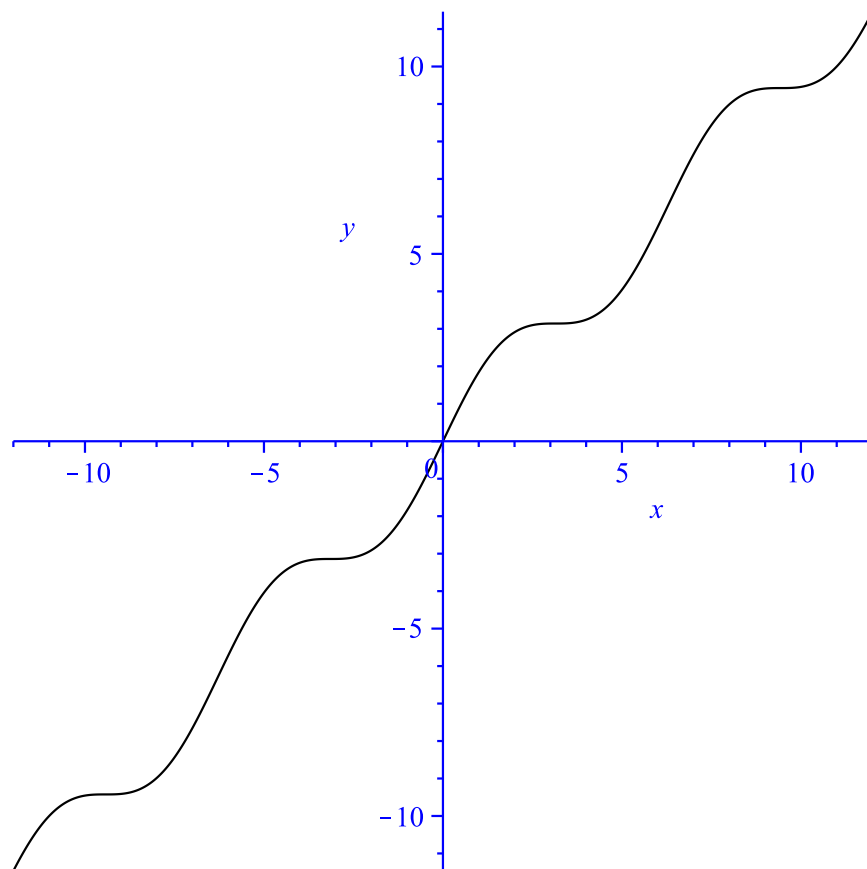


Grafico di $f(x) = x + \sin(x)$

Esercizio 6.b. Fare un esempio di una funzione f continua in $[0, 2]$ tale che $f(0) = f(2)$, ma non esiste nessun $x \in (0, 2)$ tale che $f'(x) = 0$.

La funzione

$$f(x) = |x - 1|$$

ha le proprietà richieste. f è continua in $[0, 2]$, $f(0) = f(2) = 1$ ed è derivabile in $[0, 2] \setminus \{1\}$ con derivata

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 1, \\ -1 & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Tale derivata non si annulla mai.

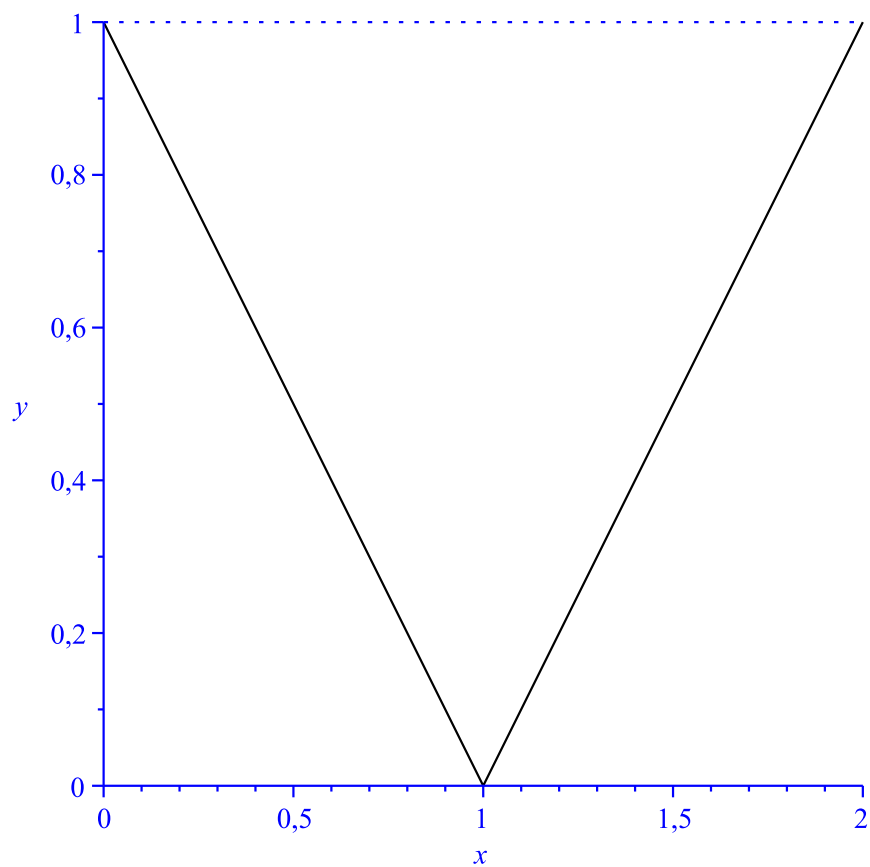


Grafico di $f(x) = |x - 1|$

Esercizio 6.c. Fare un esempio di una funzione derivabile in $\mathbb{R}$ tale che $f(\mathbb{R}) = (-1, 1]$.

La funzione

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} - 1$$

ha le proprietà richieste. f è una funzione pari, derivabile in $\mathbb{R}$ con derivata

$$f'(x) = -\frac{4x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Quindi è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$, $x = 0$ è un punto di massimo assoluto dove assume il valore $f(0) = 1$ ed è strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. Dato che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

si ha che -1 è l'estremo inferiore dell'immagine $f(\mathbb{R})$ ma non è un minimo. Quindi, per il teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori in $(-1, 1]$, ossia $f(\mathbb{R}) = (-1, 1]$.

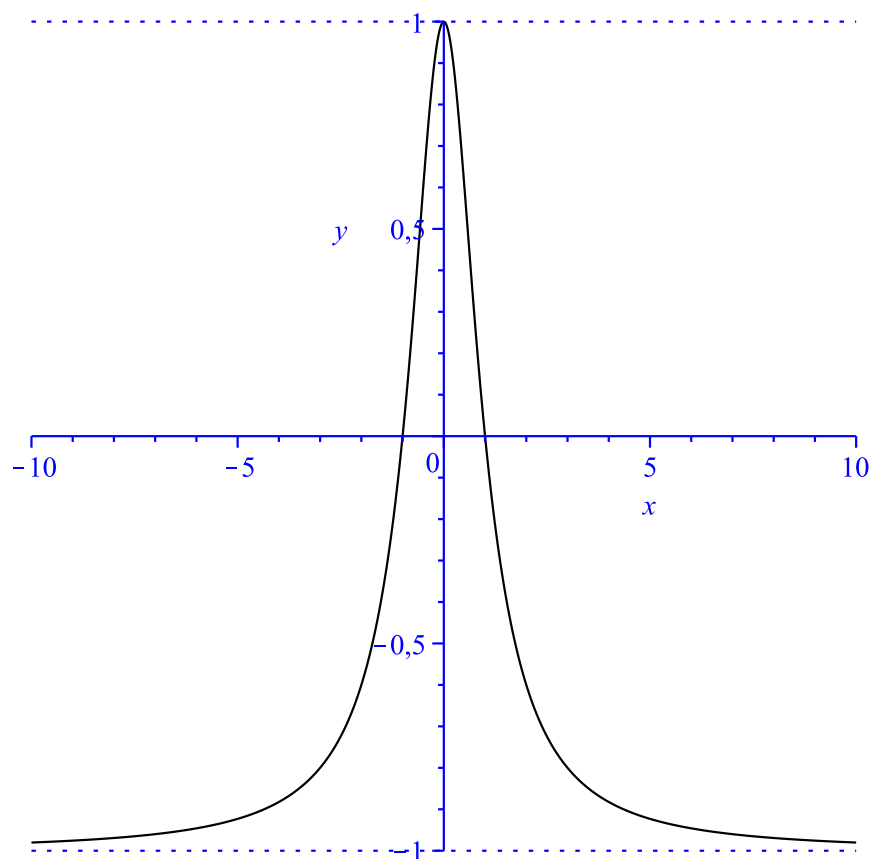


Grafico di $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1} - 1$