Analisi Matematica
Foglio di esercizi n. 1
SOLUZIONI

Esercizio 1.a. Risolvere
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+2}<0.$$

Per $x \notin \{-2,0,1\}$, sommando le frazioni otteniamo
$$\frac{3x^2+2x-2}{x(x-1)(x+2)}<0.$$

Il numeratore è positivo in
$$\left(-\infty,-\frac{\sqrt{7}+1}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{7}-1}{3},+\infty\right).$$

Il denominatore è positivo in $(-2,0)\cup(1,+\infty)$. Infine, studiando il segno del rapporto, otteniamo che l'insieme delle soluzioni è
$$(-\infty,-2)\cup\left(-\frac{\sqrt{7}+1}{3},0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{7}-1}{3},1\right).$$

Esercizio 1.b. Risolvere
$$\frac{x(x+1)^2}{x^2-16}\leq\frac{(x+1)^3}{x^2+2x-24}.$$

Riunendo i termini a sinistra, la disequazione diventa
$$\frac{x(x+6)(x+1)^2-(x+4)(x+1)^3}{(x-4)(x+4)(x+6)}\leq 0$$

con $x \notin \{-6,-4,4\}$, ossia
$$(x+1)^2\cdot\frac{x(x+6)-(x+4)(x+1)}{(x-4)(x+4)(x+6)}\leq 0$$

quindi sappiamo che $x=-1$ è una soluzione. Per le altre otteniamo
$$\frac{x(x+6)-(x+4)(x+1)}{(x-4)(x+4)(x+6)}=\frac{x-4}{(x-4)(x+4)(x+6)}=\frac{1}{(x+4)(x+6)}\leq 0 \Leftrightarrow -6<x<-4.$$

Dunque l'insieme delle soluzioni è
$$(-6,-4)\cup\{-1\}.$$

Esercizio 1.c. Risolvere
$$x - 3 > \sqrt{2x^2 - 10x - 12}.$$

La disequazione è equivalente a
$$\begin{cases} 2x^2 - 10x - 12 \geq 0 \\ x - 3 > 0 \\ (x-3)^2 > 2x^2 - 10x - 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+1)(x-6) \geq 0 \\ x > 3 \\ (x+3)(x-7) < 0 \end{cases}$$

ossia
$$\begin{cases} x \leq -1 \vee x \geq 6 \\ x > 3 \\ -3 < x < 7 \end{cases}$$

e quindi l'insieme delle soluzioni è
$$[6, 7).$$

Esercizio 1.d. Risolvere
$$\sqrt{2 - \sqrt{2+x}} \geq x.$$

Prima determiniamo il dominio di esistenza del termine a sinistra
$$\begin{cases} 2 + x \geq 0 \\ 2 - \sqrt{2+x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -2 \\ 4 \geq 2 + x \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$$

Ora, se $x \in [-2, 0]$ la disuguaglianza è chiaramente soddisfatta.
Se invece $x \in (0, 2]$ dobbiamo ancora risolvere
$$2 - \sqrt{2+x} \geq x^2$$

che equivale a
$$\sqrt{2+x} \leq 2 - x^2$$

ossia
$$\begin{cases} x \in (0, 2] \\ 2 - x^2 \geq 0 \\ 2 + x \leq (2 - x^2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \leq \sqrt{2} \\ x^4 - 4x^2 - x + 2 \geq 0 \end{cases}$$

Dato che il polinomio $x^4 - 4x^2 - x + 2$ si annulla in -1 e 2 abbiamo la fattorizzazione
$$x^4 - 4x^2 - x + 2 = (x-2)(x+1)(x^2 + x - 1) \geq 0.$$

da cui otteniamo che nell'intervallo $(0, \sqrt{2}]$ la disuguaglianza è soddisfatta in
$$\left(0, \frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right].$$

Così l'insieme completo delle soluzioni è

$$[-2, 0] \cup \Big(0, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big] = \Big[-2, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\Big].$$

Esercizio 1.e. Risolvere

$$\frac{|x| - x}{2x^2 - 1} \geq -2.$$

Prima di tutto escludiamo i valori per i quali il denominatore si annulla:

$$2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \vee x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Discutiamo il segno dell'argomento del modulo.
Nel nostro caso è tutto molto più semplice perché, quando $x > 0$, la disequazione diventa

$$0 \geq -2$$

che è sempre verificata (ad esclusione del valore positivo che annulla il denominatore).
Quando $x < 0$ otteniamo

$$\frac{4x^2 - 2x - 2}{2x^2 - 1} \geq 0.$$

Il numeratore è non negativo in $(-\infty, -\frac{1}{2}]$, mentre il denominatore è positivo in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, dunque il loro rapporto è non negativo in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup [-\frac{1}{2}, +\infty)$.
Unendo i risultati otteniamo

$$\Big(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \cup \Big[-\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \cup \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\Big).$$

Esercizio 1.f. Risolvere

$$2\log_4(|x|) \leq \log_2(2 - 3x) + 1.$$

Per la formula del cambiamento di base

$$\log_4(|x|) = \frac{\log_2(|x|)}{\log_2(4)} = \frac{\log_2(|x|)}{2}.$$

Quindi la disequazione data si può riscrivere come

$$\log_2(|x|) \leq \log_2(2 - 3x) + \log_2(2).$$

Imponiamo le condizioni di esistenza $x \neq 0$ e $x < \frac{2}{3}$. Così, usando le proprietà dei logaritmi, la disequazione diventa

$$|x| \leq 2(2 - 3x) \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 - 6x \\ x \geq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} -x \leq 4 - 6x \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq \frac{4}{7}.$$

Quindi la soluzione è

$$(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{4}{7}\right].$$

Esercizio 1.g. Risolvere

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \sin^2(x) \leq \frac{1}{4}.$$

Per la formula di addizione

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\cos(x) - \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\sin(x) = -\cos(x)$$

Inoltre $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$. Quindi possiamo riscrivere la disequazione in termini di $\cos(x)$:

$$-\cos(x) + 1 - \cos^2(x) \leq \frac{1}{4}$$

ovvero

$$4\cos^2(x) + 4\cos(x) - 3 = \underbrace{(2\cos(x) + 3)}_{>0}(2\cos(x) - 1) \geq 0.$$

Quindi basta risolvere $\cos(x) \geq 1/2$ e così l'insieme delle soluzioni è

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right].$$

Esercizio 1.h. Risolvere

$$\frac{2\cos(2x) - \cos^2(x)}{1 + \sin^2(x)} \leq 1$$

Moltiplicando per il denominatore $1 + \sin^2(x) > 0$ otteniamo

$$2\cos(2x) - \cos^2(x) \leq 1 + \sin^2(x)$$

da cui

$$2\cos(2x) \leq 1 + \sin^2(x) + \cos^2(x) = 2,$$

ovvero

$$\cos(2x) \leq 1$$

che è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2.a. Disegnare il grafico di

$$f(x) = |\sqrt{|x-3|} - 1|.$$

Il dominio è $D = \mathbb{R}$. Partendo dal grafico della funzione elementare $\sqrt{x}$ e utilizzando le operazioni sui grafici descritte a lezione si ottiene:

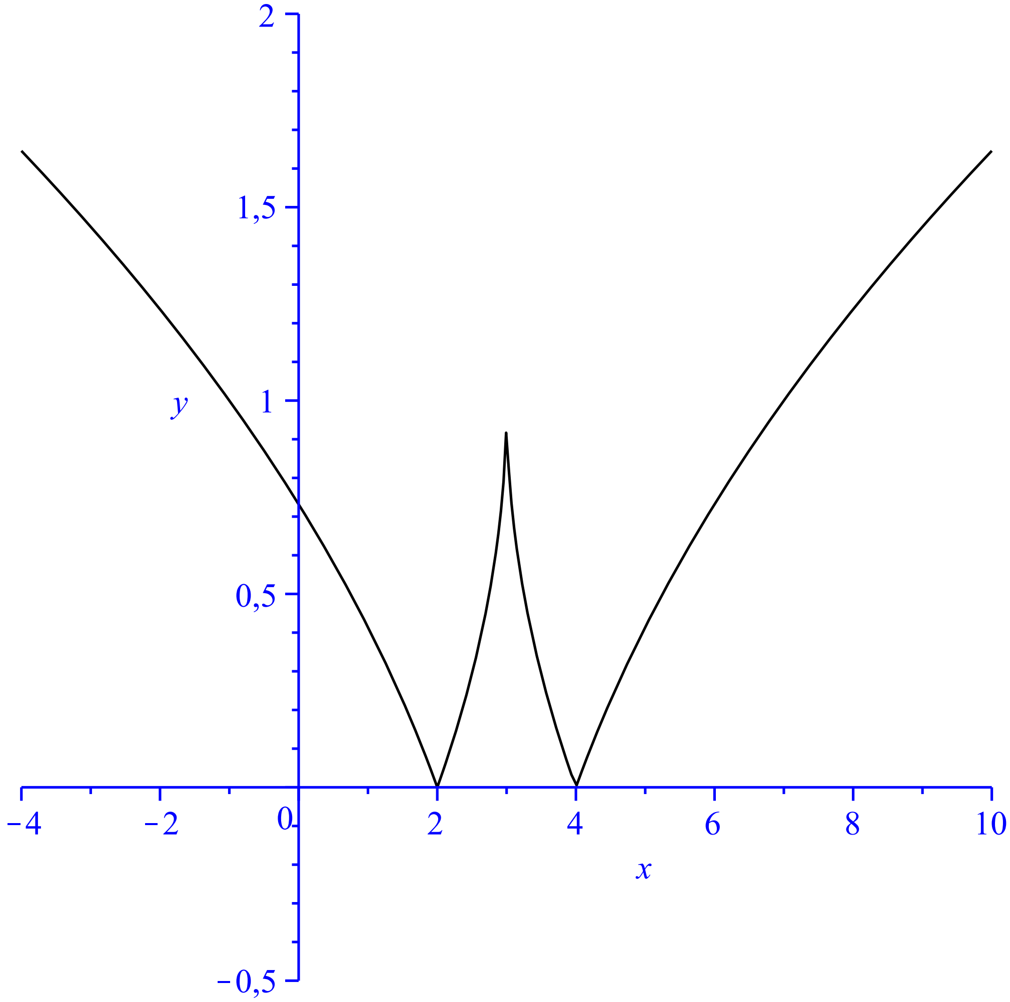

Grafico di $f(x) = |\sqrt{|x-3|} - 1|$

Esercizio 2.b. Disegnare il grafico di

$$f(x) = 1 + \sin(-|x - \pi|).$$

Il dominio è $D = \mathbb{R}$. Partendo dal grafico della funzione elementare $\sin x$ e utilizzando le operazioni sui grafici descritte a lezione si ottiene:

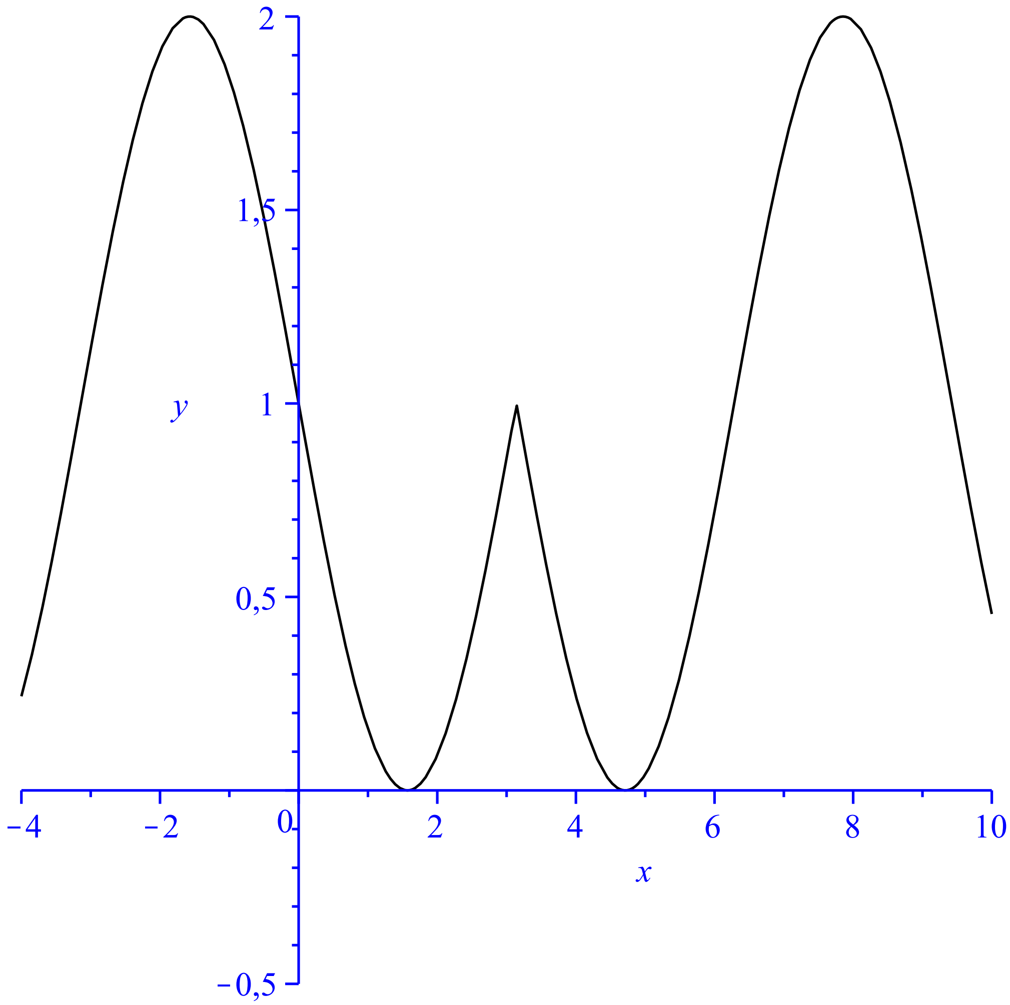

Grafico di $f(x) = 1 + \sin(-|x - \pi|)$

Esercizio 2.c. Disegnare il grafico di

$$f(x) = \frac{1}{||x| - 2|} - \frac{1}{2}.$$

Il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$. Partendo dal grafico della funzione elementare $\sin x$ e utilizzando le operazioni sui grafici descritte a lezione si ottiene:

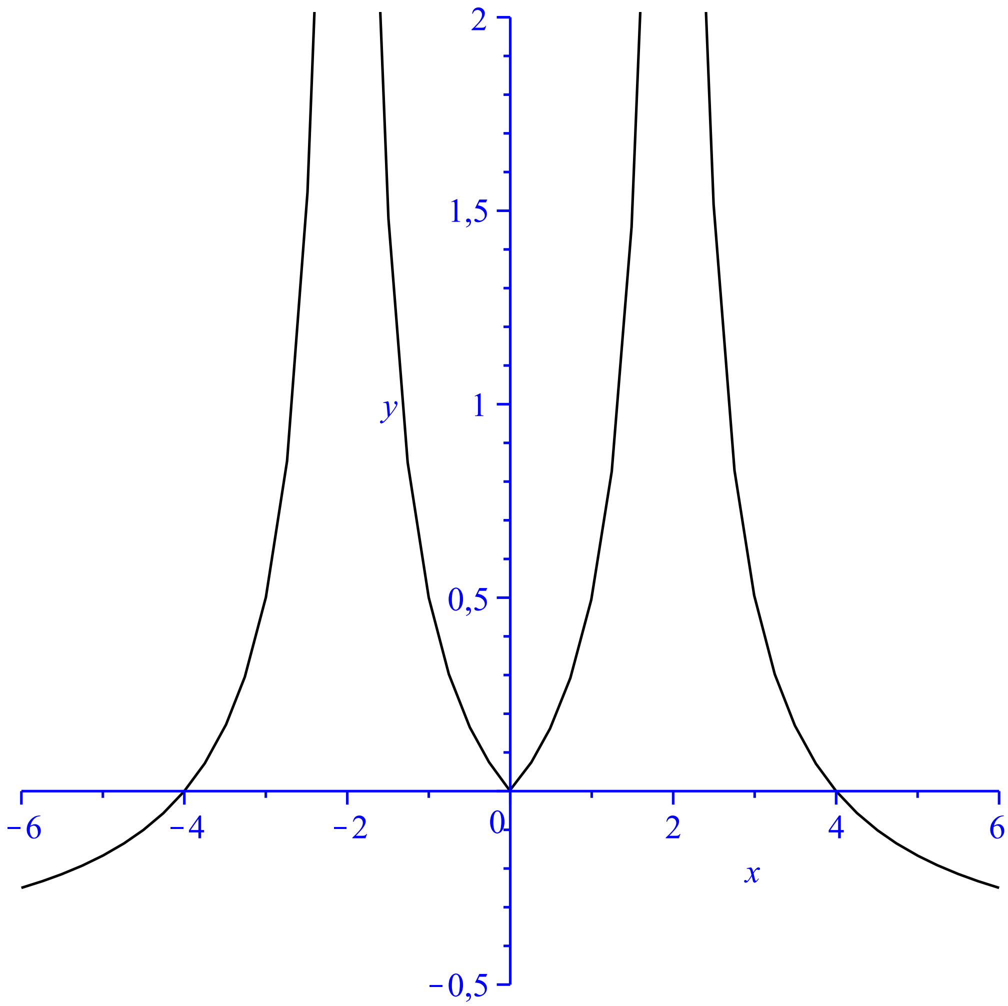

Grafico di $f(x) = \frac{1}{||x|-2|} - \frac{1}{2}$

Esercizio 2.d. Disegnare il grafico di

$$f(x) = \arctan(|\tan(x)|).$$

La funzione f è pari, periodica di periodo π ed è definita per $x \neq \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$ ossia

$$D = \mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi \ : \ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Ricordando le proprietà della funzione elementare $\tan(x)$ e le relazioni tra una funzione e la sua inversa si ottiene:

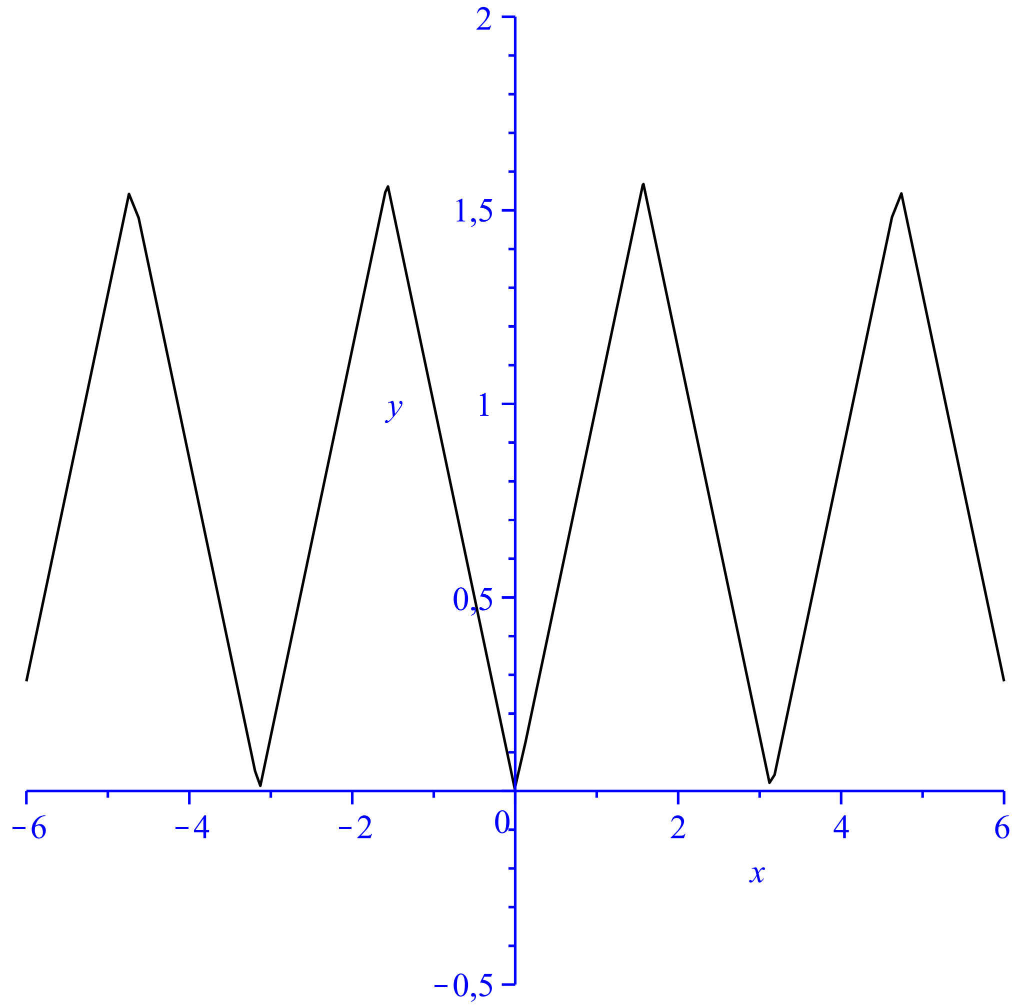

Grafico di $f(x) = \arctan(|\tan(x)|)$

Esercizio 3.a. Determinare il dominio D della funzione
$$f(x) = \frac{\log_2(|\sin(2^x)|)}{|x-2|}.$$

Dobbiamo imporre che
$$|x-2| \neq 0 \quad \wedge \quad |\sin(2^x)| > 0.$$
Dato che il modulo è sempre maggiore o uguale a 0, segue che le condizioni sono
$$x \neq 2 \quad \wedge \quad \sin(2^x) \neq 0.$$
Quindi il dominio è
$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2 \wedge x \neq \log_2(k\pi) \text{ con } k \in \mathbb{N}^+\}.$$

Esercizio 3.b. Determinare il dominio D della funzione
$$f(x) = \frac{\tan(x/2)}{1-\cos(4x)}.$$

Le condizioni da imporre sono
$$\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$
e
$$1-\cos(4x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{2k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z}.$$
Notando che la seconda condizione implica la prima, abbiamo che
$$D = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Esercizio 3.c. Determinare il dominio D della funzione
$$f(x) = \sqrt{1-|x-1|+|x-3|}.$$

Dobbiamo imporre
$$1-|x-1|+|x-3| \geq 0.$$
Dato che
$$1-|x-1|+|x-3| = \begin{cases} 3 & \text{se } x \leq 1 \\ 5-2x & \text{se } 1 < x < 3 \\ -1 & \text{se } x \geq 3 \end{cases}$$
la disuguaglianza è verificata in $D = (-\infty, \frac{5}{2}]$.

Esercizio 3.d. Determinare il dominio D della funzione

$$f(x) = \arccos(x - \sqrt{x^2 - 3x}).$$

L'argomento dell'arcocoseno deve appartenere all'intervallo $[-1, 1]$, quindi

$$-1 \leq x - \sqrt{x^2 - 3x} \leq 1$$

ovvero

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 3x} \leq 1 + x \\ \sqrt{x^2 - 3x} \geq x - 1 \end{cases}$$

La prima disequazione è equivalente al sistema

$$\begin{cases} x(x-3) \geq 0 \\ 1 + x \geq 0 \\ x^2 - 3x \leq 1 + x^2 + 2x \end{cases}$$

da cui

$$x \in \left[-\frac{1}{5}, 0\right].$$

La seconda disequazione equivale all'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} x(x-3) \geq 0 \\ x - 1 \geq 0 \\ x^2 - 3x \leq 1 + x^2 - 2x \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} x(x-3) \geq 0 \\ x - 1 < 0 \end{cases}$$

il primo non ha soluzioni, mentre il secondo è risolto quando $x \leq 0$.
Si conclude che il dominio è

$$D = \left[-\frac{1}{5}, 0\right].$$

Esercizio 4.a. Determinare il dominio D della funzione

$$f(x) = \frac{4x+1}{x-2}$$

e l'insieme immagine $f(D) = \{f(x) \ : \ x \in D\}$. Verificare se $f : D \to f(D)$ sia invertibile e nel caso determinare la funzione inversa f^{-1}.

La funzione ha dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Per $x \neq 2$, risolvendo l'equazione

$$y = \frac{4x+1}{x-2}$$

rispetto a x otteniamo che se $y \neq 4$ allora c'è un'unica soluzione:

$$yx - 2y - 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x(y-4) = 1 + 2y \Leftrightarrow x = \frac{1+2y}{y-4}.$$

Quindi possiamo concludere che $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$ e f è invertibile con inversa

$$f^{-1}(x) = \frac{1+2x}{x-4}.$$

Esercizio 4.b. Determinare il dominio D della funzione

$$f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$$

e l'insieme immagine $f(D) = \{f(x) \ : \ x \in D\}$. Verificare se $f : D \to f(D)$ sia invertibile e nel caso determinare la funzione inversa f^{-1}.

La funzione ha dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Per $x \neq 0$, risolvendo l'equazione

$$y = \frac{x^2+1}{2x}$$

rispetto a x otteniamo c'è almeno una soluzione quando $|y| \geq 1$,

$$x^2 - 2yx + 1 = 0 \Leftrightarrow x_1 = y + \sqrt{y^2-1} \vee x_2 = y - \sqrt{y^2-1}$$

Quindi possiamo concludere che $f(D) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ e f non è invertibile in quanto per $|y| > 1$, x_1 e x_2 sono distinti. Ad esempio per $y = 2$ si ha che

$$f(2+\sqrt{3}) = f(2-\sqrt{3}) = 2$$

ossia f non è iniettiva in D.

Esercizio 4.c. Determinare il dominio D della funzione

$$f(x) = \frac{2}{3 + \log(\frac{x+1}{x})}$$

e l'insieme immagine $f(D) = \{f(x) \ : \ x \in D\}$. Verificare se $f : D \to f(D)$ sia invertibile e nel caso determinare la funzione inversa f^{-1}.

Il dominio della funzione è dato dalle condizioni

$$\begin{cases} 3 + \log\left(\frac{x+1}{x}\right) \neq 0 \\ \frac{x+1}{x} > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{e^3}{e^3-1}(< -1) \\ x < -1 \quad \vee \quad x > 0 \end{cases}$$

ovvero

$$D = (-\infty, -1) \setminus \left\{-\frac{e^3}{e^3-1}\right\} \cup (0, +\infty).$$

Risolvendo

$$y = \frac{2}{3 + \log(\frac{x+1}{x})}$$

rispetto a x otteniamo per $y \neq 0$,

$$3y + y \log\left(\frac{x+1}{x}\right) - 2 = 0 \Leftrightarrow \log\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{2-3y}{y}$$

ossia

$$1 + \frac{1}{x} = \exp\left(\frac{2-3y}{y}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\exp(\frac{2-3y}{y}) - 1}$$

dove l'ultimo passaggio è giustificato se $\exp(\frac{2-3y}{y}) \neq 1$, ossia se $y \neq 2/3$.
Quindi $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{0, 2/3\}$ e f è invertibile con inversa

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{\exp(\frac{2-3x}{x}) - 1}.$$

Esercizio 5.a. Dimostrare per induzione che

$$\forall n \geq 7, \qquad n! > 3^n.$$

Passo base. Verifichiamo $P(7)$:

$$7! = 5040 > 3^7 = 2187.$$

Passo induttivo. Dimostriamo che che per $n \geq 7$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$(n+1)! = (n+1) \cdot n! \overset{P(n)}{>} (n+1) \cdot 3^n > 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}.$$

Esercizio 5.b. Dimostrare per induzione che

$$\forall n \geq 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

Passo base. Verifichiamo $P(1)$:

$$1 = \sum_{k=0}^{1} \frac{1}{1^2} \leq 2 - \frac{1}{1} = 1.$$

Passo induttivo. Dimostriamo che per $n \geq 1$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{P(n)}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

dove all'ultimo passaggio abbiamo applicato l'ipotesi induttiva. Basta allora verificare che

$$2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

ossia

$$-(n+1)^2 + n \leq -n(n+1) \Leftrightarrow -n - 1 \leq -n \Leftrightarrow -1 \leq 0$$

che è vera.