Analisi Matematica - CdL Informatica
Svolgimento della prova scritta del 12/2/2025

Esercizio 1. Sia $f(x) = \log\left(\dfrac{2|x|^3}{|x-2|}\right)$.

a) Tracciare il grafico di f specificando: il dominio, gli asintoti, gli intervalli di monotonia, i massimi e i minimi relativi e assoluti, gli intervalli di convessità/concavità e i flessi.

b) Trovare una retta che sia tangente al grafico di f e parallela alla retta $8x - 2y = 5$.

c) Determinare un intervallo I tale che la funzione f sia biunivoca da I a $\mathbb{R}$.

Per le proprietà del logaritmo, possiamo riscrivere la funzione come

$$f(x) = 3\log(|x|) - \log(|x-2|) + \log(2).$$

È necessario che $|x| > 0$ e $|x-2| > 0$ e dunque il dominio è $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$.
Non ci sono asintoti a $\pm\infty$ perché

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2} f(x) = +\infty$$

e quindi $x = 0$ e $x = 1$ sono asintoti verticali.
Per $x \in D$,

$$f'(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x-2} = \frac{2(x-3)}{x(x-2)}.$$

Quindi f è strettamente crescente in $(0, 2)$ e in $[3, +\infty)$ ed è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$ e in $(2, 3]$. Dunque $x = 3$ è un punto di minimo relativo. Non ci sono punti di massimo o minimo assoluto. Per $x \in D$,

$$f''(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{1}{(x-2)^2} = -\frac{2(x^2 - 6x + 6)}{x^2(x-2)^2}.$$

Quindi f è convessa in $[3 - \sqrt{3}, 2)$ e in $(2, 3 + \sqrt{3}]$, mentre è concava in $(-\infty, 0)$, in $(0, 3 - \sqrt{3}]$ e in $[3 + \sqrt{3}, +\infty)$. I punti di flesso sono $x = 3 \pm \sqrt{3}$.

b) Il coefficiente angolare della retta $8x - 2y = 5$ è 4 e risolvendo l'equazione $f'(x) = 4$ si ottiene

$$\frac{2(x-3)}{x(x-2)} = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = \frac{3}{2}.$$

Scegliendo ad esempio $x_1 = 1$ si ha che la retta tangente

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1) = 4(x-1) + \log(2)$$

ha la proprietà richiesta.

c) Dopo aver tracciato il grafico si nota che nell'intervallo $I = (0, 2)$ la funzione è strettamente crescente e quindi iniettiva. Inoltre f è continua in I, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$ e così, per il teorema dei valori intermedi, $f(I) = \mathbb{R}$. Si conclude che la funzione f è biunivoca da I a $\mathbb{R}$.

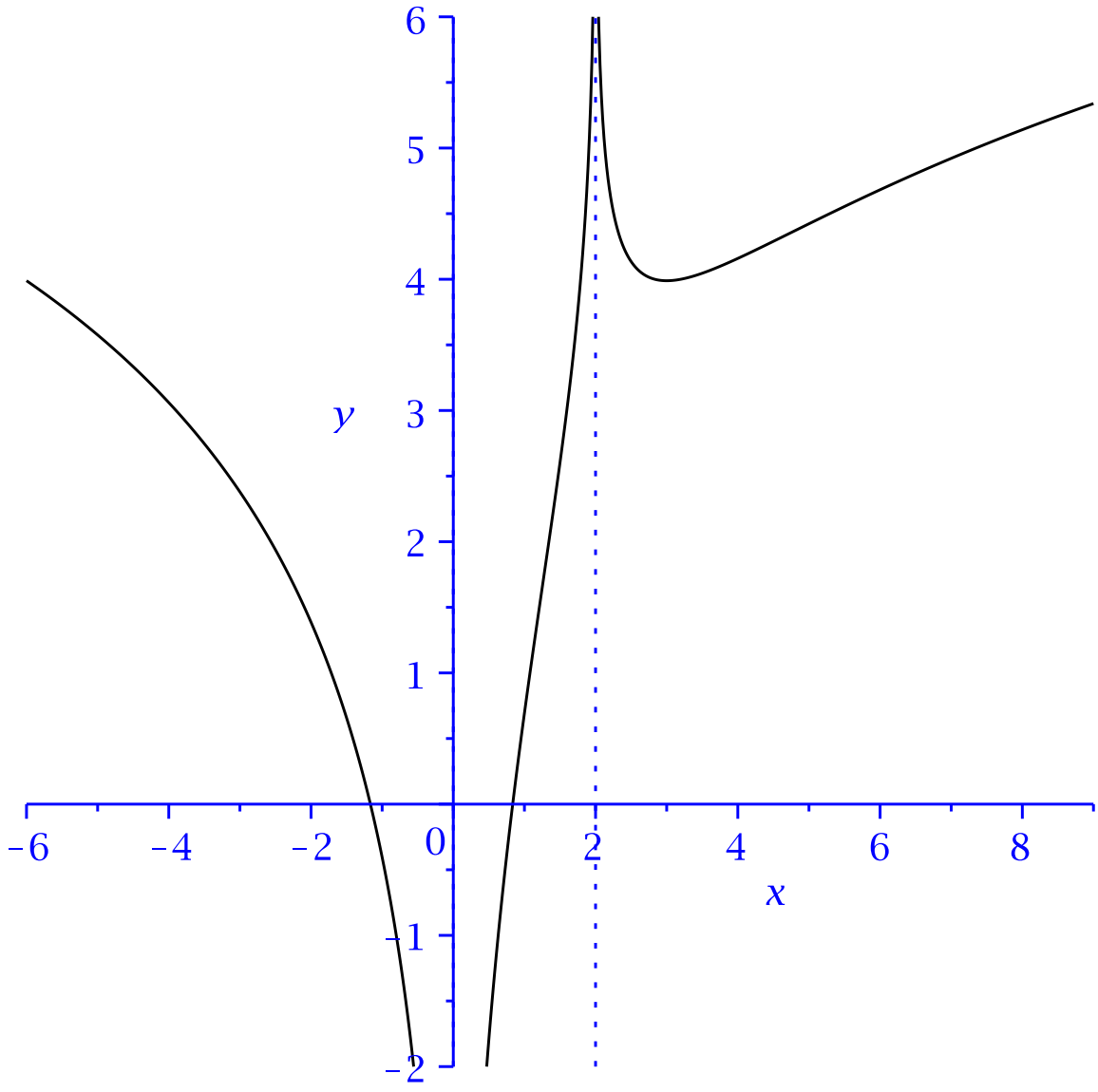

Grafico di $f(x) = \log\left(\dfrac{2|x|^3}{|x-2|}\right)$

Esercizio 2. Sia $f(x) = \dfrac{x}{(\log(3x+1)-5x)^2} - \dfrac{e^{-x}+\sqrt{5x+1}}{8x}$.

a) Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^a f(x))$ al variare di $a \in \mathbb{R}$.

b) Calcolare $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

a) Per $x \to +\infty$,

$$f(x) \sim \frac{x}{(-5x)^2} - \frac{\sqrt{5x}}{8x} = \frac{1}{25x} - \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{x}} \sim -\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{x}}.$$

Quindi

$$\lim_{x\to+\infty}(x^a f(x)) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^a \cdot -\frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{x}}\right) = -\frac{\sqrt{5}}{8}\cdot\lim_{x\to+\infty} x^{a-\frac{1}{2}} = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{5}}{8} & \text{se } a = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } a < \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Per $x \to 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x}{(3x - \frac{(3x)^2}{2} + o(x^2) - 5x)^2} - \frac{(1 - x + o(x)) + (1 + \frac{5}{2}x + o(x))}{8x} \\ &= \frac{x}{(-2x - \frac{9x^2}{2} + o(x^2))^2} - \frac{2 + \frac{3}{2}x + o(x)}{8x} \\ &= \frac{x}{4x^2 + 18x^3 + o(x^3)} - \frac{2 + \frac{3}{2}x + o(x)}{8x} \\ &= \frac{1}{4x + 18x^2 + o(x^2)} - \frac{2 + \frac{3}{2}x + o(x)}{8x} \\ &= \frac{8x - (2 + \frac{3}{2}x + o(x))(4x + 18x^2 + o(x^2))}{32x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{8x - 8x - (6+36)x^2 + o(x^2)}{32x^2 + o(x^2)} \to -\frac{42}{32} = -\frac{21}{16}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. a) Risolvere il problema di Cauchy per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$\begin{cases} y(x) = 3e^{2\cos(x)}\sin(x) - \tan(x)y'(x) \\ y(\frac{\pi}{3}) = 0 \end{cases}$$

b) L'equazione $y(x) = \frac{1}{2}$ ha almeno una soluzione in $(0, \frac{\pi}{2})$?

a) Risistemando i termini abbiamo che per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$$y'(x) + \frac{y(x)}{\tan(x)} = 3e^{2\cos(x)}\cos(x).$$

Quindi $a(x) = \frac{1}{\tan(x)}$,

$$A(x) = \int a(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{(\sin(x))'}{\sin(x)}\,dx = \log(\sin(x))$$

e il fattore integrante è $\exp(A(x)) = \sin(x)$.
Inoltre, dopo aver posto $t = 2\cos(x)$, si ha che $dt = -2\sin(x)\,dx$ e

$$\begin{aligned} \int \exp(A(x))f(x)\,dx &= \int 3e^{2\cos(x)}\cos(x)\sin(x)\,dx = -\frac{3}{4}\int e^t t\,dt \\ &= -\frac{3}{4}e^t(t-1) + c = \frac{3}{4}e^{2\cos(x)}(1 - 2\cos(x)) + c, \end{aligned}$$

Così la soluzione generale è

$$y(x) = \exp(-A(x))\int \exp(A(x))f(x)\,dx = \frac{3e^{2\cos(x)}(1-2\cos(x)) + c}{4\sin(x)}.$$

Imponendo la condizione $y(\frac{\pi}{3}) = 0$ si trova

$$0 = y\Big(\frac{\pi}{3}\Big) = \frac{0 + c}{2\sqrt{3}} \implies c = 0$$

e la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{3e^{2\cos(x)}(1 - 2\cos(x))}{4\sin(x)}.$$

b) Dato che $y(\frac{\pi}{3}) = 0$ e $\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} y(x) = \frac{3}{4}$, per il teorema dei valori intermedi, la funzione continua $y(x)$ assume in $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$ tutti valori compresi tra 0 e $\frac{3}{4}$, tra cui anche il valore richiesto $\frac{1}{2}$. Quindi l'equazione $y(x) = \frac{1}{2}$ ha almeno una soluzione in $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}) \subset (0, \frac{\pi}{2})$.

Esercizio 4. Sia $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}-1}{x^a(e^{4x}+1)}\,dx$.

a) Determinare per quali $a \geq 0$ l'integrale dato è convergente.

b) Calcolare l'integrale per $a = 0$.

a) Nell'intervallo $(0, +\infty)$, i punti da indagare sono due: 0^+ e $+\infty$.
Per $x \to 0^+$,

$$\frac{e^{2x}-1}{x^a(e^{4x}+1)} \sim \frac{2x}{2x^a} = \frac{1}{x^{a-1}}.$$

Per la convergenza deve valere la condizione $a - 1 < 1$ ossia $a < 2$.
Per $x \to +\infty$ abbiamo che

$$\frac{e^{2x}-1}{x^a(e^{4x}+1)} \sim \frac{e^{2x}}{x^a e^{4x}} = \frac{e^{-2x}}{x^a}$$

Dato che $0 < \frac{1}{x^a} \leq 1$ in $[1, +\infty)$ e $\int_1^{+\infty} e^{-2x}dx$ è convergente, per confronto non ci sono condizioni da imporre ad a.
Così l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $a > -2$.

b) Per $a = 0$, posto $t = e^{2x}$, si ha che $\log(t) = 2x$, $dt/t = 2\,dx$ e

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}-1}{e^{4x}+1}\,dx &= \int_1^{+\infty} \frac{t-1}{t^2+1}\,\frac{dt}{2t} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t^2+1} + \frac{t}{t^2+1} - \frac{1}{t}\right) dt \\
&= \frac{1}{2}\left[\arctan(t) + \frac{1}{2}\log(t^2+1) - \log(t)\right]_1^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2}\left[\arctan(t) + \frac{1}{2}\log\left(\frac{t^2+1}{t^2}\right)\right]_1^{+\infty} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - \frac{\pi}{4} - \frac{\log(2)}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{\log(2)}{4}.
\end{aligned}$$