Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 19-9-2024

Esercizio 1. Sia $f(x,y) = \dfrac{e^{x^2} - e^{y^2}}{\sqrt{8+x^2y} - \sqrt{8+xy^2}}$.

(a) Calcolare $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.

(b) Trovare un punto di accumulazione del dominio di f dove il limite non esiste.

(a) Per $(x,y)\to(1,1)$

$$f(x,y) = \frac{e^{y^2}(e^{\overbrace{x^2-y^2}^{\to 0}} - 1)}{8+x^2y-(8+xy^2)} \cdot \left(\sqrt{8+x^2y} + \sqrt{8+xy^2}\right)$$

$$= \frac{e^{y^2}\overbrace{(x^2-y^2)}^{x+y}\cdot(1+o(1))}{xy(x-y)} \cdot \left(\sqrt{8+x^2y} + \sqrt{8+xy^2}\right)$$

$$\to e(1+1)\cdot(3+3) = 12e.$$

(b) Notando che lungo la retta $y=0$ il denominatore di f si annulla e che $(1,0)$ è un punto di accumulazione del dominio di f allora per $x=1$ e $y\to 0^{\pm}$

$$f(1,y) = \frac{e-e^{y^2}}{\sqrt{8+y}-\sqrt{8+y^2}}$$

$$= \frac{e-e^{y^2}}{8+y-(8+y^2)} \cdot \left(\sqrt{8+y} + \sqrt{8+y^2}\right)$$

$$\sim \frac{(e-1)\cdot 2\sqrt{8}}{y} \begin{cases} \nearrow +\infty & \text{per } y\to 0^+ \\ \searrow -\infty & \text{per } y\to 0^- \end{cases}$$

e dunque il limite in $(1,0)$ non esiste.

Esercizio 2. Sia il campo vettoriale $\boldsymbol{F}(x,y) = \left(\dfrac{x^3 - yx^4 - y^5}{x^4+y^4}, \dfrac{x^5+y^3+xy^4}{x^4+y^4} \right)$.

(a) Sia γ la curva che parte da $(1,0)$ e percorre il quarto della circonferenza $x^2+y^2=1$ fino a $(0,1)$, il segmento da $(0,1)$ a $(0,3)$ e infine il quarto dell'ellisse $9x^2+4y^2=36$ fino a $(2,0)$. Calcolare $\displaystyle\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle$.

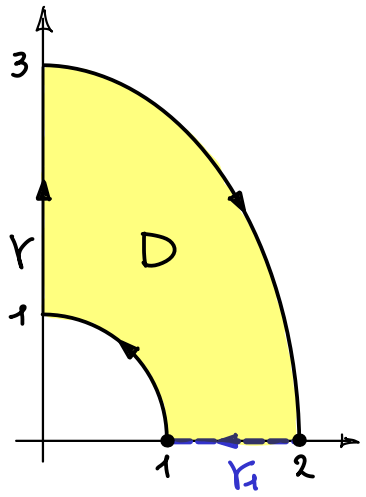
(b) Fare un esempio di curva γ_2 da $(1,0)$ a $(2,0)$ tale che $\displaystyle\int_{\gamma_2} \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle = 1$.

(a) Abbiamo che $\vec{F} = \vec{G} + \vec{H}$ dove

$\vec{G} = \left(\frac{x^3}{x^4+y^4}, \frac{y^3}{x^4+y^4}\right)$ e $\vec{H} = (-y, x)$

$\vec{G}$ è conservativo in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con potenziale $U_G(x,y) = \frac{1}{4}\log(x^4+y^4)$.

Quindi per Gauss-Green

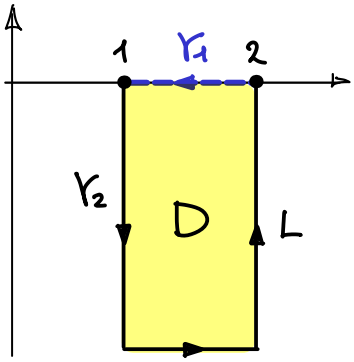


$$\int_\gamma \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = U_G(2,0) - U_G(1,0) - \underbrace{\iint_D \overbrace{\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y}}^{2} dx\,dy}_{\text{orientazione}} - \int_{\gamma_1} \langle \vec{H}, d\vec{s}\rangle$$

$$= \log(2) - 2|D| + \int_1^2 \overbrace{\langle (0,t),(1,0)\rangle}^{=0} dt$$

$$= \log(2) - 2\left(\frac{2\cdot 3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) = \log(2) - \frac{5\pi}{2}.$$

(b) Consideriamo un rettangolo D come in figura con altezza $L>0$ da determinare. Sia γ_2 la curva da $(1,0)$ a $(2,0)$ formata da 3 lati di D. Come prima



$$\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s}\rangle = \log(2) + \overbrace{2|D|}^{L\cdot 1} - 0 \overset{?}{=} 1$$

e quindi basta scegliere $L = \dfrac{1-\log(2)}{2} > 0$.

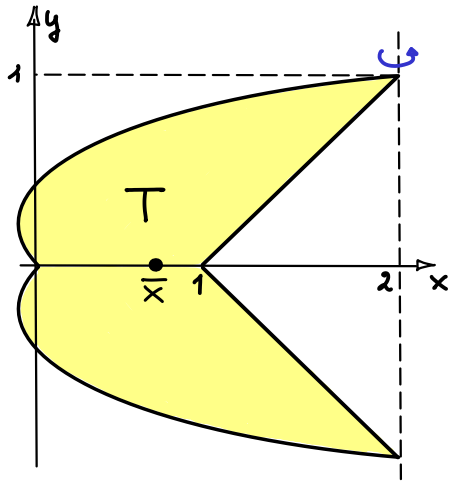
Esercizio 3. Sia $T = \{(x, y, 0) : 4y^2 \leq x + 2|y|,\ x \leq |y| + 1\}$.

(a) Determinare le coordinate del baricentro di T.

(b) Calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando l'insieme T di 360° attorno alla retta $L = \{(2, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

(a) Per simmetria $\overline{y} = \overline{z} = 0$.

Calcoliamo $\overline{x}$:



$$|T| = 2\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=4y^2-2y}^{y+1} 1\,dx\right)dy = 2\int_0^1 (1+3y-4y^2)\,dy$$

$$= 2\left[y+\frac{3}{2}y^2-\frac{4}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{7}{3}$$

e

$$\overline{x} = \frac{2}{|T|}\int_{y=0}^{1}\left(\int_{x=4y^2-2y}^{y+1} x\,dx\right)dy = \frac{2\cdot 3}{7}\int_0^1 \frac{1}{2}\left((y+1)^2-(4y^2-2y)^2\right)dy$$

$y^2+2y+1-16y^4+16y^3-4y^2$

$$= \frac{3}{7}\left[y+y^2-y^3+4y^4-\frac{16}{5}y^5\right]_0^1 = \frac{3}{7}\cdot\frac{9}{5} = \frac{27}{35}.$$

(b) Applichiamo il teorema di Pappo-Guldino

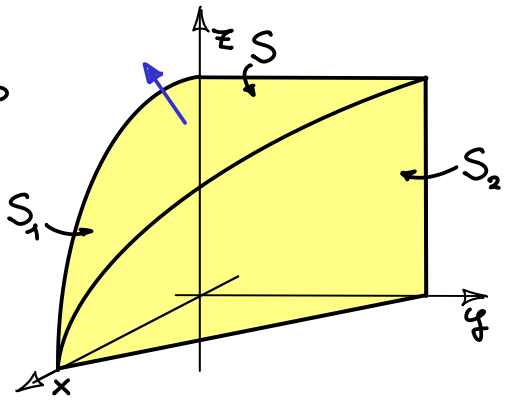
$$V = |T|\cdot 2\pi\,(2-\overline{x}) = \frac{7}{3}\cdot 2\pi\,\frac{43}{35_5} = \frac{86}{15}\pi.$$

↑ distanza del baricentro dell'asse di rotazione

Esercizio 4. Sia $D = \{(x,y,z) : x^2+z^2 \le 1,\ |x|+|y| \le 1,\ y \ge 0\}$.

(a) Calcolare il volume di D e l'area totale del suo bordo ∂D.

(b) Calcolare $\iint_S \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle$ dove e $S = \{(x,y,z) : x^2+z^2=1,\ x\ge 0, z\ge 0\} \cap D$ è orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}\rangle \ge 0$ e $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (z, xyz, 2y)$.



(a) In figura è rappresentato il quarto di D contenuto nel primo ottante.

$$|D| = 4\iint_{\substack{\{x^2+z^2\le 1\}\\ x,z\ge 0}} \left(\int_{y=0}^{1-x} dy\right) dx\,dz$$

$$\overset{CP}{=} 4\int_0^1\int_0^{\pi/2} (1-\rho\cos\theta)\rho\,d\rho\,d\theta = 4\int_0^1 \left(\rho\frac{\pi}{2} - \rho^2\cdot 1\right) d\rho = \left[\pi\rho^2 - \frac{4}{3}\rho^3\right]_0^1 = \pi - \frac{4}{3}$$

mentre

$$|\partial D| = 4(|S| + |S_1| + |S_2|) = 4\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4}\right) = (3+\sqrt{2})\pi - 4$$

($\frac{1}{4}$ cerchio, $\frac{1}{4}$ ellisse)

dove

$$|S| = \int_\gamma (1-x)\,ds = \int_0^{\pi/2} (1-\cos t)\,dt = \frac{\pi}{2} - 1$$

e $\vec{r}(t) = (\cos t, 0, \sin t)$ con $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Parametrizzazione cartesiana di S:

$\vec{\sigma}(x,y) = (x, y, \sqrt{1-x^2})$ con $A = \{(x,y) : 0 \le y \le 1-x,\ x \in [0,1]\}$.

e quindi

$$\iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S}\rangle = \iint_A \left\langle (\sqrt{1-x^2}, *, 2y), \left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, 0, 1\right)\right\rangle$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-x} (x+2y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(x(1-x) + (1-x)^2\right) dx$$

($1-x$)

$$= \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$