

Esercizio 1. Sia $f(x, y) = \frac{\arcsin(2xy)}{\log\left(\frac{1+x^2}{1+y}\right)}$.

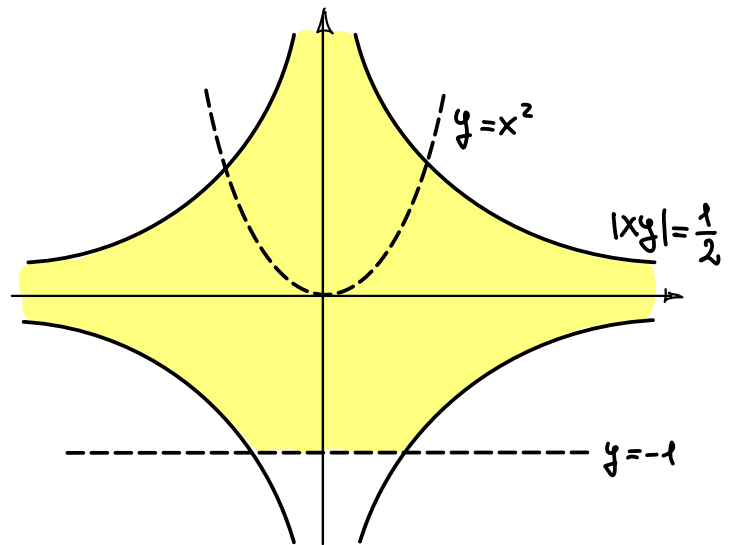
(a) Disegnare il dominio della funzione f .

(b) Determinare se il seguente limite esiste e nel caso calcolarlo: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

(a) Le condizioni per il dominio sono

$$\begin{cases} 2|xy| \leq 1 \\ \frac{1+x^2}{1+y} > 0, \frac{1+x^2}{1+y} \neq 1 \\ 1+y \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |xy| \leq \frac{1}{2} \\ x^2 \neq y \\ y > -1 \end{cases}$$



(b) Dato che per $x \rightarrow 0^+$

$$f(x, 0) = 0 \rightarrow 0$$

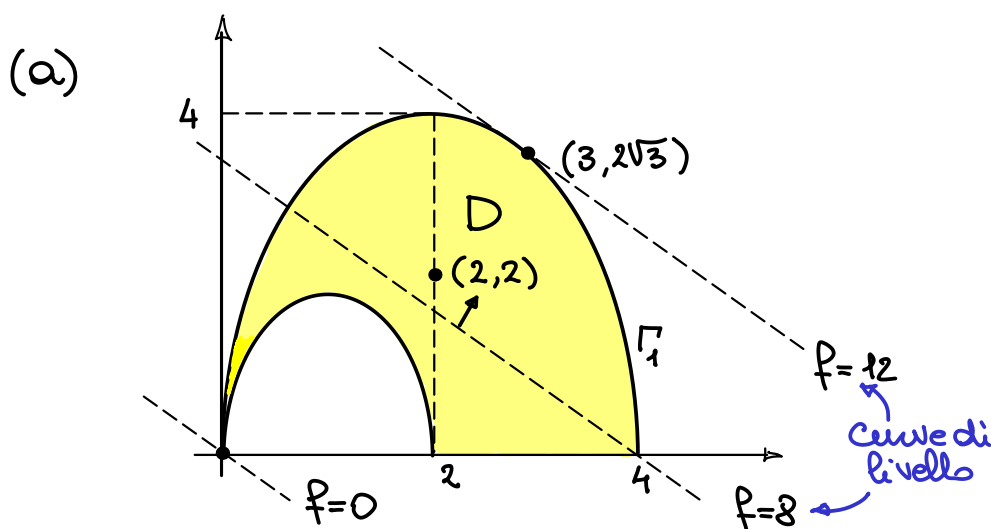
e lungo la curva $y = x^2 + x^3$,

$$\begin{aligned} f(x, x^2 + x^3) &= \frac{\arcsin(2x^3 + 2x^4)}{\log(1+x^2) - \log(1+x^2+x^3)} \\ &= \frac{2x^3 + O(x^3)}{\cancel{x^2} + O(x^3) - \cancel{x^2} - x^3 + O(x^3)} \rightarrow -2 \end{aligned}$$

si conclude che il limite dato non esiste.

Esercizio 2. Sia $D = \{(x, y) : 8x \leq 4x^2 + y^2 \leq 16x, y \geq 0\}$.

- (a) Determinare il valore massimo e il valore minimo di $f(x, y) = 2x + \sqrt{3}y$ in D .
 (b) Fare un esempio di funzione g che sia continua in D e che non assuma il suo valore massimo in D sul bordo ∂D .



Dato che l'insieme compatto D sta nel primo quadrante

$$f(x, y) = 2x + \sqrt{3}y \geq 0 \quad \forall x, y \in D.$$

Siccome $(0, 0) \in D$, il valore minimo di f in D è $0 = f(0, 0)$

Inoltre $\nabla f(x, y) = (2, \sqrt{3})$ e quindi anche il valore massimo deve essere assunto sul bordo. Vista la posizione della curva di livello $f=8$, per il valore massimo basta studiare f lungo la parte di bordo

$$\Gamma_1 = \{(x, y) : 4x^2 + y^2 - 16x = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$$

Moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} 2 = \lambda(8x - 16) \\ \sqrt{3} = \lambda 2y \\ 4x^2 + y^2 = 16x \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda \neq 0 \\ y \neq 0 \end{array} \right. \quad \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8x - 16}{2y} \rightarrow y = 2\sqrt{3}(x - 2)$$

$$4x^2 + \frac{3}{12}(x - 2)^2 = 16x$$

$$4x^2 - 16x + 12 = 4(x - 3)(x - 1) = 0 \rightarrow \begin{matrix} (1, -2\sqrt{3}) \notin D \\ (3, 2\sqrt{3}) \in D \end{matrix}$$

Il valore massimo di f in D è $f(3, 2\sqrt{3}) = 12$.

(b) La funzione

$$g(x,y) = -((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)$$

è continua in $\mathbb{R}^2$ e ha un massimo assoluto in (x_0, y_0) .

Allora basta scegliere (x_0, y_0) interno a D .

Ad esempio $(x_0, y_0) = (2, 2)$.

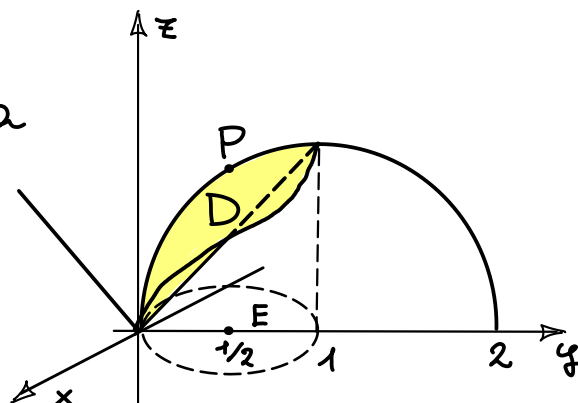
Esercizio 3. Sia $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\}$.

(a) Determinare il piano tangente al solido D nel punto $(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(b) Calcolare $\iiint_D z \, dx \, dy \, dz$.

(a) Il punto $P = (0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ sta sulla superficie $S \subseteq \partial D$ data dalla sfera

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 0.$$



Il piano tangente a D in P è

$$0 = \langle \nabla g(P), (x, y, z) - P \rangle = \langle (0, -1, \sqrt{3}), (x, y - \frac{1}{2}, z - \frac{\sqrt{3}}{2}) \rangle$$

ossia $-y + \sqrt{3}z = 1$.

$$(b) \iiint_D z \, dx \, dy \, dz = \iint_E \left(\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{2y-x^2-y^2}} z \, dz \right) dx \, dy = \iint_E (y - x^2 - y^2) dx \, dy$$

$$\text{con } E = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2y - x^2 - y^2\}$$

$$\hookrightarrow x^2 + y^2 - y \leq 0, x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \frac{1}{2} + \rho \sin \theta \end{cases} \stackrel{CP}{=} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} - \rho^2 \right) \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= 2\pi \left[\frac{\rho^2}{8} - \frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) = \frac{\pi}{32}$$

Esercizio 4. Sia il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y, z) = \left(\frac{x}{1+x^2+y^2}, x^3+z, 2 \right)$ e sia il solido $D = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$ con il bordo ∂D orientato verso l'esterno. Inoltre siano le superfici:

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 2\} \cap \partial D \quad \text{e} \quad S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z\} \cap \partial D.$$

(a) Calcolare $\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$.

(b) Calcolare $\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \text{rot}(\mathbf{F}), d\mathbf{S} \rangle$.

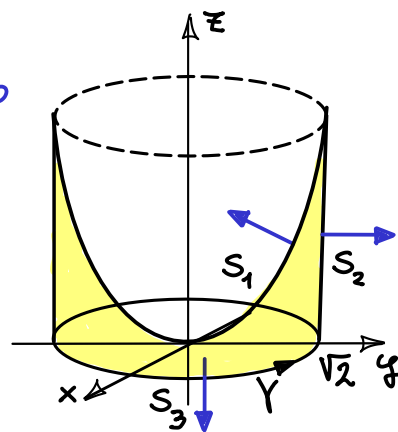
(a) Per il teorema della divergenza

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iiint_D \text{div}(\vec{F}) dx dy dz - \iint_{S_3} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle$$

integrale = 0 perché D è simmetrico rispetto a y=x

$$= \iiint_D \frac{1 + \overbrace{(y^2 - x^2)}}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy dz + 2|S_3|$$

$$= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 2\}} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2} \left[z \right]_0^{x^2+y^2} dx dy + 4\pi$$



$$\stackrel{CP}{=} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{(1+\rho^2)^2} \rho d\rho d\theta + 4\pi = 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} \frac{\rho^2 \pm 1}{(1+\rho^2)^2} \rho d\rho + 4\pi$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(\frac{2\rho}{1+\rho^2} - \frac{2\rho}{(1+\rho^2)^2} \right) d\rho + 4\pi = \pi \left[\log(1+\rho^2) + \frac{1}{1+\rho^2} \right]_0^{\sqrt{2}} + 4\pi$$

$$= \frac{10}{3}\pi + \pi \log(3).$$

(b) Per il teorema del rotore

$$\iint_{S_1 \cup S_2} \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle$$

dove γ è il bordo di $S_1 \cup S_2$ con l'orientazione indotta

$$\vec{F}(t) = (\sqrt{2} \cos(t), \sqrt{2} \sin(t), 0) \quad t \in [0, 2\pi].$$

Così

$$= \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{\sqrt{2} \cos t}{1+2}, 2\sqrt{2} \cos^3 t, 2 \right), (-\sqrt{2} \sin t, \sqrt{2} \cos t, 0) \right\rangle dt$$

$$= -\frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \underbrace{\cos t \sin t}_{\int=0} dt + 4 \int_0^{2\pi} \cos^4 t dt$$

$$\text{dove } \cos^4 t = (1 - \sin^2 t) \cos^2 t = \cos^2 t - \frac{1}{4} \sin^2(2t)$$

$$= 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = 4\pi - \pi = 3\pi.$$