

Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 21-6-2024

Esercizio 1. Sia $f(x, y) = \frac{x^2(x+y)}{(x+y)^4 - xy}$.

(a) Determinare se il seguente limite esiste e nel caso calcolarlo: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.

(b) Trovare la retta tangente nel punto $(1, 0)$ alla curva di livello $C = \{(x, y) : f(x, y) = 1\}$.

(a) Dato che $\lim_{y \rightarrow 0^+} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0^+} 0 = 0$

e $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{x^4} = +\infty$ #

si conclude che il limite di f per $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ non esiste.

(b) Da $f(x, y) = 1$ si ha

$$h(x, y) = x^2(x+y) - (x+y)^4 + xy = 0.$$

e quindi la retta tangente a C in $(1, 0)$ è

$$\nabla h(1, 0) \cdot (x-1, y-0) = 0$$

ovvia

$$-1(x-1) - 2y = 0 \Rightarrow x + 2y = 1$$

perché

$$h_x(x, y) = 2x(x+y) + x^2 - 4(x+y)^3 + y \Rightarrow h_x(1, 0) = -1,$$

$$h_y(x, y) = x^2 - 4(x+y)^3 + x \Rightarrow h_y(1, 0) = -2.$$

Esercizio 2. Si consideri il sistema:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 36 \end{cases}$$

(a) Verificare che in un intorno del punto $(1, 2, 3)$ il sistema definisce implicitamente due funzioni C^1 : $y = \varphi(x)$ e $z = \psi(x)$.

(b) Calcolare $\varphi'(1)$ e $\psi'(1)$.

(a) Il sistema dato è

$$\begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0 \\ g(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 36 = 0 \end{cases}$$

quindi

$$\begin{bmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2z \\ 3y^2 & 3z^2 \end{bmatrix} (1, 2, 3) \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 27 \end{bmatrix} \xrightarrow{\det} 4 \cdot 27 - 6 \cdot 12 = 36 \neq 0$$

e per il teorema delle funzioni implicite per sistemi:
 $\exists y = \varphi(x)$ e $z = \psi(x)$ C^2 tali che $\varphi(1) = 2$, $\psi(1) = 3$ e
risolviamo il sistema dato in un intorno di $x = 1$.

(b) In un intorno di $x = 1$ si ha che

$$\begin{cases} x^2 + \varphi^2(x) + \psi^2(x) = 14 \\ x^3 + \varphi^3(x) + \psi^3(x) = 36 \end{cases}$$

Derivando rispetto a x si ottiene

$$\begin{cases} 2x + 2\varphi\varphi' + 2\psi\psi' = 0 \\ 3x^2 + 3\varphi^2\varphi' + 3\psi^2\psi' = 0 \end{cases}$$

Sostituendo $x = 1$ si ha

$$\begin{cases} 1 + 2\varphi' + 3\psi' = 0 \\ 1 + 4\varphi' + 9\psi' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi'(1) = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{6} = -1 \\ \psi'(1) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (h(x) \cdot (2x^2y - 2xy^3 + y), h(x) \cdot (x - 3y^2))$$

dove $h \in C^1(\mathbb{R})$.

(a) Trovare una funzione h non costante tale che \mathbf{F} sia conservativo in \mathbb{R}^2 e calcolare il corrispondente potenziale.

(b) Nel caso in cui h sia la costante 1, trovare un rettangolo R di area non nulla tale che

$$\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = 0$$

dove γ è la curva chiusa data dal bordo di R percorso in senso antiorario.

(a) In \mathbb{R}^2 il campo vettoriale \vec{F} è conservativo se e solo se è irrotazionale ossia se $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = h'(x)(x - 3y^2) + \cancel{h(x)} = h(x)(2x^2 - 6xy^2 + \cancel{1}) = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

da cui

$$h'(x)(x - 3y^2) = \cancel{h(x)} 2x(x - 3y^2).$$

Così h soddisfa l'eq. differenziale lineare omogenea

$$h'(x) - 2x h(x) = 0$$

la cui soluzione generale è $h(x) = C \cdot e^{x^2}$.

Una soluzione non costante è $h(x) = e^{x^2}$.

Per trovare la funzione potenziale U risolviamo

$$\begin{cases} U_x = e^{x^2}(2x^2y - 2xy^3 + y) \\ U_y = e^{x^2}(x - 3y^2) \end{cases} \rightarrow U = \int U_y dy = e^{x^2}(xy - y^3) + c(x)$$

e

$$U_x = e^{x^2}(2x(xy - y^3) + y) + c'(x) = e^{x^2}(2x^2y - 2xy^3 + y)$$

implica $c'(x) = 0$ ossia c è costante.

Quindi un potenziale è $U(x, y) = e^{x^2}(xy - y^3)$.

(b) Supponendo $R = [0, a] \times [0, b]$ con $a, b > 0$,
per la formula di Gauss-Green

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_0^a \left(\int_0^b (x - (2x^2 - 6xy^2 + x)) dy \right) dx$$

$$= \left[\left[-\frac{2}{3} x^3 y + x^2 y^3 \right]_{y=0}^b \right]_{x=0}^a$$

$$= -\frac{2}{3} a^3 b + a^2 b^3 = a^2 b \left(b^2 - \frac{2}{3} a \right)$$

che vale 0 ad esempio per $a = \frac{3}{2}$ e $b = 1$.

Esercizio 4. Sia il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \left(yz^2, \frac{4yz}{x^2 + y^2}, 2z \right)$$

e sia la superficie

$$S = \{(u \cos(v), u \sin(v), u^2) : u \in [1, 2], v \in [0, 2\pi]\}$$

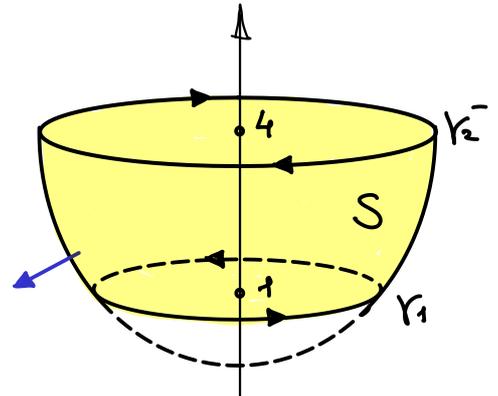
orientata in modo che $\langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle \leq 0$.

(a) Calcolare $\iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$.

(b) Calcolare $\iint_S \langle \text{rot}(\mathbf{F}), d\mathbf{S} \rangle$ applicando il teorema del rotore.

Posto $x = u \cos(v)$ e $y = u \sin(v)$ si ha che S è una parte del paraboloido $z = x^2 + y^2$:

$$S = \{(x, y, x^2 + y^2) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$



(a)

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle &= \iint_{\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}} \left\langle \left(yz^2, \frac{4yz}{x^2 + y^2}, 2z \right), (2x, 2y, -1) \right\rangle dx dy \\ &= \iint_{\{1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}} (2xy(x^2 + y^2)^2 + 8y^2 - 2(x^2 + y^2)) dx dy \\ &= \int_{\rho=1}^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} (8\rho^2 \sin^2 \theta - 2\rho^2) \rho d\theta d\rho = \pi \int_1^2 4\rho^3 d\rho = 15\pi. \end{aligned}$$

(b) Per il teorema del rotore

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \text{rot}(\mathbf{F}), d\mathbf{S} \rangle &= \int_{r_1 \cup r_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = \int_{r_1} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle - \int_{r_2} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\langle (\sin \theta, 4 \sin \theta, *) \rangle, (-\sin \theta, \cos \theta, 0) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle (32 \sin \theta, 8 \sin \theta, *) \rangle, (-2 \sin \theta, 2 \cos \theta, 0) \rangle \right) d\theta \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} (63 \sin^2 \theta - 12 \sin \theta \cos \theta) d\theta = 63\pi$$

dove $\vec{r}_1(t) = (\cos \theta, \sin \theta, 1)$ e $\vec{r}_2(t) = (2 \cos \theta, 2 \sin \theta, 4)$

con $\theta \in [0, 2\pi]$.