**Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica - Prova scritta del 21-6-2024**

| | |
|---|---|
| **Cognome**: | |
| **Nome**: | |
| **Orale**: | |

| Esercizio | Punteggio |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| **Totale** | |

**Esercizio 1.** Sia $f(x,y) = \dfrac{x^2(x+y)}{(x+y)^4 - xy}$.

(a) Determinare se il seguente limite esiste e nel caso calcolarlo: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(b) Trovare la retta tangente nel punto $(1,0)$ alla curva di livello $C = \{(x,y) \,:\, f(x,y) = 1\}$.

**Esercizio 2.** Si consideri il sistema: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 14 \\ x^3+y^3+z^3 = 36 \end{cases}$.

(a) Verificare che in un intorno del punto $(1,2,3)$ il sistema definisce implicitamente due funzioni $C^1$: $y = \varphi(x)$ e $z = \psi(x)$.

(b) Calcolare $\varphi'(1)$ e $\psi'(1)$.

**Esercizio 3.** Sia il campo vettoriale

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \big(h(x)\cdot(2x^2y - 2xy^3 + y), h(x)\cdot(x - 3y^2)\big)$$

dove $h \in C^1(\mathbb{R})$.

(a) Trovare una funzione $h$ non costante tale che $\boldsymbol{F}$ sia conservativo in $\mathbb{R}^2$ e calcolare il corrispondente potenziale.

(b) Nel caso in cui $h$ sia la costante 1, trovare un rettangolo $R$ di area non nulla tale che

$$\int_\gamma \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{s}\rangle = 0$$

dove $\gamma$ è la curva chiusa data dal bordo di $R$ percorso in senso antiorario.

**Esercizio 4.** Sia il campo vettoriale

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \left(yz^2, \frac{4yz}{x^2+y^2}, 2z\right)$$

e sia la superficie

$$S = \big\{(u\cos(v), u\sin(v), u^2) : u \in [1,2], v \in [0,2\pi]\big\}$$

orientata in modo che $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{k}\rangle \le 0$.

(a) Calcolare $\displaystyle\iint_S \langle \boldsymbol{F}, d\boldsymbol{S}\rangle$.

(b) Calcolare $\displaystyle\iint_S \langle \mathrm{rot}(\boldsymbol{F}), d\boldsymbol{S}\rangle$ applicando il teorema del rotore.