

Analisi Matematica 2 - Ing. Meccanica e Energetica
Soluzione della prova scritta del 16-2-2024

Esercizio 1. (a) Verificare che in un intorno di $(1, 0)$ l'equazione

$$e^{x+y} + y^2 + 1 = x^2 + e(y+1)$$

definisce implicitamente una funzione $x = \psi(y)$ tale che $\psi(0) = 1$ e determinare il suo polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $y_0 = 0$.

(b) Determinare se $(1, 0)$ è un punto di massimo relativo, minimo relativo o nessuno dei due, della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2$ vincolata a

$$\Gamma = \{(x, y) : e^{x+y} + y^2 + 1 = x^2 + e(y+1)\}.$$

(a) Sia $F(x, y) = e^{x+y} + y^2 + 1 - x^2 - ey - e$ allora

$$F_x(x, y) = e^{x+y} - 2x, \quad F_y(x, y) = e^{x+y} + 2y - e.$$

Dato che $F_x(1, 0) = e - 2 \neq 0$ allora per il teo. delle funzioni implicite $\exists x = \psi(y)$ tale che $\psi(0) = 1$ e

$$\psi'(0) = - \frac{F_y(1, 0)}{F_x(1, 0)} = 0.$$

Inoltre derivando due volte l'equazione

$$e^{\psi+y} + y^2 + 1 = \psi^2 + ey + e$$

rispetto a y si ha

$$e^{\psi+y} \cdot (\psi' + 1) + 2y = 2\psi\psi' + e$$

$$e^{\psi+y} \cdot (\psi' + 1)^2 + e^{\psi+y} \psi'' + 2 = 2(\psi')^2 + 2\psi\psi''$$

Infine ponendo $y=0$ si trova

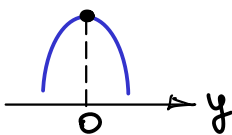
$$e(0+1)^2 + e\psi'' + 2 = 2 \cdot 0^2 + 2\psi'' \Rightarrow \psi''(0) = - \frac{e+2}{e-2}$$

e quindi

$$T_2(y) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{e+2}{e-2} \cdot y^2.$$

(b) Per (a) la funzione $f(x,y)=x^2+y^2$ ristretta a Γ in un intorno di $(1,0)$ è data da

$$\begin{aligned}h(y) &= f(\psi(y), y) = \left(1 + \frac{1}{2} \psi''(0) y^2 + o(y^2)\right)^2 + y^2 \\&= 1 + \psi''(0) y^2 + y^2 + o(y^2) \\&= 1 + (1 + \psi''(0)) y^2 + o(y^2)\end{aligned}$$

Dato che $(1 + \psi''(0)) = -\frac{4}{e-2} < 0$ il punto $y=0$  è di minimo relativo per h e quindi $(1,0)$ è un punto di minimo relativo per f vincolato a Γ .

Esercizio 2. Si consideri la curva parametrica semplice e chiusa

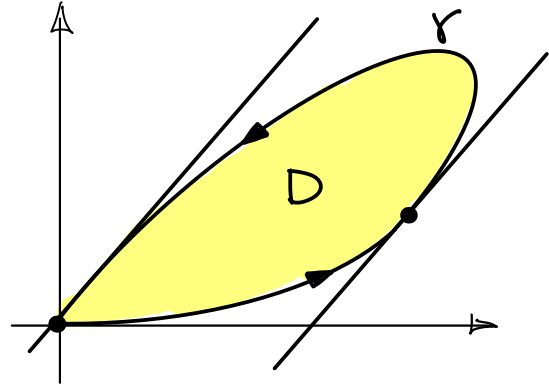
$$\gamma(t) = (t(1-t), (1-t)t^2) \text{ per } t \in [0, 1].$$

- (a) Determinare l'area della parte di piano D delimitata dalla curva γ .
 (b) Trovare tutte le rette tangenti a γ che siano ortogonali alla retta $x + y = 2$.

Il vettore tangente a $\vec{\gamma}$ è

$$\vec{\gamma}'(t) = (1-2t, 2t-3t^2)$$

per $t \in [0, 1]$.



(a) Per la formula di Gauss-Green

$$\begin{aligned} |D| &= \int_{\gamma} \langle (-y, 0), d\vec{s} \rangle = - \int_0^1 (1-t)t^2 \cdot (1-2t) dt \\ &\quad \leftarrow t^2(1-3t+2t^2) \\ &= - \left[\frac{t^3}{3} - 3\frac{t^4}{4} + 2\frac{t^5}{5} \right]_0^1 = \frac{-20+45-24}{60} = \frac{1}{60}. \end{aligned}$$

(b) La direzione ortogonale alla retta $x+y=2$ è data dal vettore $(1,1)$. Il vettore tangente $\vec{\gamma}'$ è parallelo a tale direzione se e solo se

$$1-2t = 2t-3t^2 \rightarrow 3t^2-4t+1=0 \\ t_1=1, t_2=\frac{1}{3}$$

Quindi le rette tangenti cercate sono:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(1) &= (0,0) \\ \vec{\gamma}'(1) &= (-1,-1) \Rightarrow \begin{cases} x=0-(t-1) \\ y=0-(t-1) \end{cases} \Rightarrow y=x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}\left(\frac{1}{3}\right) &= \left(\frac{2}{9}, \frac{2}{27}\right) \\ \vec{\gamma}'\left(\frac{1}{3}\right) &= \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{2}{9}-\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{3}\right) \\ y=\frac{2}{27}-\frac{1}{3}\left(t-\frac{1}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow y=x-\frac{4}{27} \end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 2x, x^2 + y^2 \leq 4x, |y| \leq x\}$.

(a) Calcolare $\int_{\gamma} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle$ dove $\mathbf{F}(x, y) = (2xe^y + y, x^2e^y - 3x)$ e γ è il percorso da $(2, 0)$ a $(4, 0)$ lungo il bordo di D contenuto nel primo quadrante.

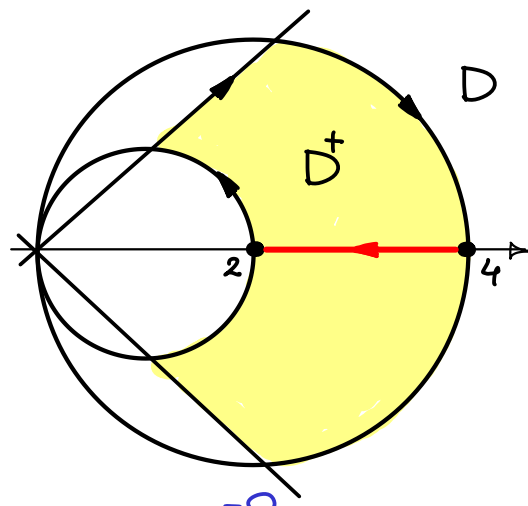
(b) Calcolare $\iint_D \frac{y(y+x)}{x^2} dx dy$.

(a) $\vec{F} = \nabla U + \vec{G}$ dove
 $U(x, y) = x^2 e^y$ e $\vec{G} = (y, -3x)$

Quindi per la formula di
 Gauss-Green

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = U(4, 0) - U(2, 0) - \left(\iint_{D^+} \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y} \right) dx dy - \int_{[2, 4]} \langle \vec{G}, d\vec{s} \rangle \right)$$

$$= 16 - 4 + 4|D^+| = 18 + 3\pi$$



dove $|D^+| = \int_0^{\pi/4} \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r dr d\theta = \frac{1}{2} (16 - 4) \int_0^{\pi/4} \cos^2\theta d\theta = \frac{3\pi + 6}{4}$.

(b) $\iint_D \left(\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} \right) dx dy = 2 \iint_{D^+} \frac{y^2}{x^2} dx dy \stackrel{CP}{=} 2 \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} r dr d\theta$

$\leftarrow$ y-pow y-disp.
 $\leftarrow$ simm per y=0

$$= 12 \int_0^{\pi/4} \tan^2\theta d\theta = \frac{3\pi}{2} - 3.$$

Esercizio 4. (a) Determinare la posizione del baricentro del solido

$$D = \{(x, y, z) : x^2 + 4y^2 + z^2 \leq 36, x(x+2) \leq 8\}.$$

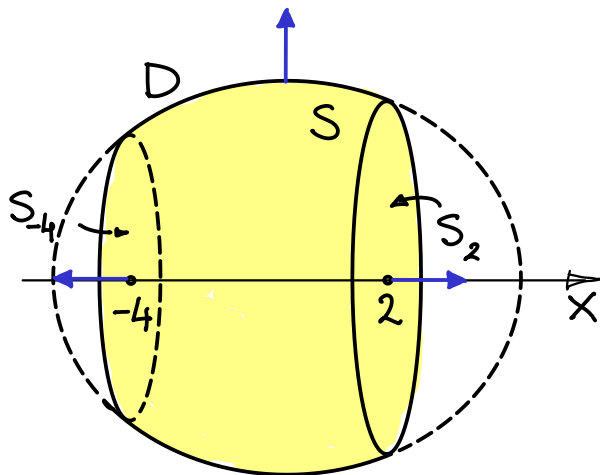
(b) Calcolare $\iint_S \langle \mathbf{F}, d\mathbf{S} \rangle$ dove $\mathbf{F}(x, y, z) = (x(z^3 - y^2), y(xy - 1), zy^2)$ e S è la superficie

$$S = \{(x, y, z) : x^2 + 4y^2 + z^2 = 36, x(x+2) \leq 8\}$$

orientata in modo che $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ nel punto $(0, 0, 6)$.

Per $x \in [-4, 2]$ la sezione S_x di D è data dall'ellisse

$$\frac{y^2}{\frac{36-x^2}{4}} + \frac{z^2}{36-x^2} \leq 1.$$



(a) Per simmetria $\bar{y} = \bar{z} = 0$ e

$$|D| = \int_{-4}^2 |S_x| dx = \int_{-4}^2 \frac{\pi}{2} (36 - x^2) dx = \frac{\pi}{2} \left[36x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^2 = 96\pi$$

$$\bar{x} = \frac{1}{|D|} \int_{-4}^2 x |S_x| dx = \frac{1}{96 \cdot 2} \left[18x^2 - \frac{x^4}{4} \right]_{-4}^2 = -\frac{13}{16}.$$

(b) Per il teorema della divergenza

$$\begin{aligned} \iint_S \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle &= \iiint_D \operatorname{div}(\vec{F}) dx dy dz - \iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle - \iint_{S_{-4}} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle \\ &= -96\pi - (-64\pi - 50\pi) = 18\pi \end{aligned}$$

dove

$$\iiint_D \underbrace{\operatorname{div}(\vec{F})}_{-1} dx dy dz = -|D| = -96\pi$$

e

$$\iint_{S_2} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_2} \langle (x(\overset{2}{z^3} - y^2), *, *), (1, 0, 0) \rangle dS$$

$\uparrow$ z-disp.
 $\leftarrow$ norm. pu $z=0$

$$\begin{cases} y = \sqrt{8}\rho \cos\theta \\ z = 2\sqrt{8}\rho \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^1 -16\rho^2 \cos^2\theta \cdot 16\rho d\theta d\rho = -(16)^2 \pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = -64\pi,$$

$$\iint_{S_{-4}} \langle \vec{F}, d\vec{S} \rangle = \iint_{S_{-4}} \langle (x(\overset{-4}{z^3} - y^2), *, *), (-1, 0, 0) \rangle dS$$

$\uparrow$ z-disp..
 $\leftarrow$ norm. pu $z=0$

$$\begin{cases} y = \sqrt{5}\rho \cos\theta \\ z = 2\sqrt{5}\rho \sin\theta \end{cases} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^1 -20\rho^2 \cos^2\theta \cdot 10\rho d\theta d\rho = -200\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^1 = -50\pi.$$