

Esercizio 1. Si consideri la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+1} + 3(k+3)!x^k}{(k+2)!(1+x)^k}$$

(a) Determinare per quali  $x \in \mathbb{R}$  la serie è convergente.

(b) Calcolare la somma della serie per  $x = 1$ .

(a) La serie data si può scrivere come

$$= 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} \cdot \left(\frac{x^2}{1+x}\right)^k + 3 \sum_{k=0}^{\infty} (k+3) \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^k$$

① è una serie di potenze rispetto a  $z = \frac{x^2}{1+x}$  e  
 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{(k+2)!}{(k+3)!} = 0 \Rightarrow R = +\infty \Rightarrow$  converge  $\forall z \in \mathbb{R}$

Così la prima serie converge se  $x \neq -1$ .

② è una serie di potenze rispetto a  $z = \frac{x}{1+x}$  e

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k+4}{k+3} = 1 \Rightarrow R = 1 \\ \text{per } z = \pm 1 \text{ non converge} \\ \text{purché } k+3 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{converge } \forall z \in (-1, 1)$$

Così la seconda serie converge se

$$\left| \frac{x}{1+x} \right| < 1, |x| < |1+x|, x < (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2, x > -\frac{1}{2}$$

Quindi la serie data converge se e solo se  $x > -\frac{1}{2}$ .

(b) Per  $x=1$  la somma vale

$$\begin{aligned} &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+2)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k + 3 \sum_{k=0}^{\infty} (k+3) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} + 3 \sum_{k=0}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^k + 9 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\ &= 8 \left( e^{1/2} - \left(1 + \frac{1}{2}\right) \right) + 3 \frac{1/2}{(1-1/2)^2} + 9 \frac{1}{1-1/2} \\ &= 8\sqrt{e} - 12 + 6 + 18 = 8\sqrt{e} + 12 \end{aligned}$$

dove si ricorda che  $\sum_{k=0}^{\infty} kx^k = x D \left( \sum_{k=0}^{\infty} x^k \right) = \frac{x}{(1-x)^2}$ .

**Esercizio 2.** Sia  $f(x, y) = 2x^2 + xy - y^2$ .

(a) Per ogni intero positivo  $n$ , determinare se il seguente limite esiste e nel caso calcolarlo:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(xy)^n}{f(x,y)}$$

(b) Determinare il valore massimo e il valore minimo di  $f$  in

$$D = \{(x, y) : x^2 - xy + y^2 \leq 4/3, y \geq 0\}.$$

(a) Il limite da calcolare non esiste  $\forall n \in \mathbb{N}^+$

Per  $y=0$ , con  $x \rightarrow 0^+$   $\frac{(xy)^n}{f(x,y)} = \frac{0}{2x^2} \rightarrow 0$

Inoltre, dato che  $f(x,y) = (x+y)(2x-y)$ , per  $y = -x + x^\alpha$  e  $\alpha > 1$  con  $x \rightarrow 0^+$

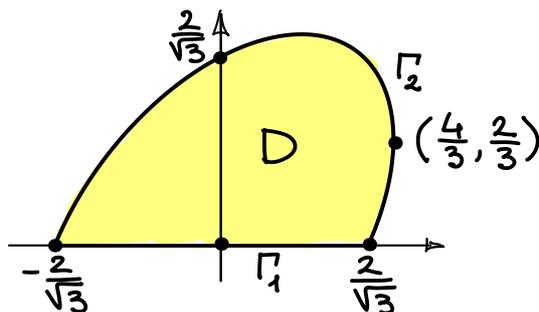
$$\frac{(xy)^n}{f(x,y)} = \frac{(-x^2 + x^{\alpha+1})^n}{x^\alpha(3x - x^\alpha)} \sim \frac{(-1)^n x^{2n}}{3x^{\alpha+1}} \not\rightarrow 0 \text{ se } \alpha > 2n - 1$$

(b)  $\nabla f(x,y) = (4x+y, x-2y)$

Punti stazionari:

$$\begin{cases} 4x+y=0 \\ x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0) \in \partial D$$

*non è interno*



Quindi la funzione continua  $f$  assume il valore massimo e il valore minimo sul bordo  $\partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ :

$$\Gamma_1 = \{(x,0) \text{ con } x \in [-2/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}]\}$$

$$\Gamma_2 = \{(x,y) : x^2 - xy + y^2 = 4/3, y > 0\}$$

$\Gamma_1$ )  $f(x,0) = 2x^2$

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 \\ f(\pm 2/\sqrt{3}, 0) &= 8/3 \end{aligned}$$

$\Gamma_2$ ) Sia  $g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 4/3$ .

I punti di  $\Gamma_2$  sono regolari:

$$\nabla g(x,y) = (2x-y, -x+2y) = (0,0) \text{ solo in } (0,0) \notin \Gamma_2$$

Moltiplicatori di Lagrange:

$$\begin{cases} 4x+y = \lambda(2x-y) \\ x-2y = \lambda(-x+2y) \\ x^2-xy+y^2 = 4/3 \end{cases} \rightarrow (x-2y)(1+\lambda) = 0$$

$x=2y$                        $\lambda=-1$

$$\begin{cases} x=2y \\ x^2-xy+y^2 = 4/3 \end{cases} \cup \begin{cases} \lambda=-1 \\ 4x+y = \lambda(2x-y) \\ x^2-xy+y^2 = 4/3 \end{cases} \rightarrow 6x=0 \rightarrow x=0$$

$\rightarrow y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

$$4y^2 - 2y^2 + y^2 = 4/3$$

$$y = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \in \Gamma_2 \quad \boxed{f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = 4}$$

$$\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \in \Gamma_2 \quad \boxed{f\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{4}{3}}$$

Confrontando i valori trovati si ha che il valore massimo di  $f$  in  $D$  è 4 e quello minimo è  $-\frac{4}{3}$ .

**Esercizio 3.** Sia  $D = \{(x, y) : 0 < x \leq y^2 \leq 8x, 1 \leq xy \leq 8\}$ .

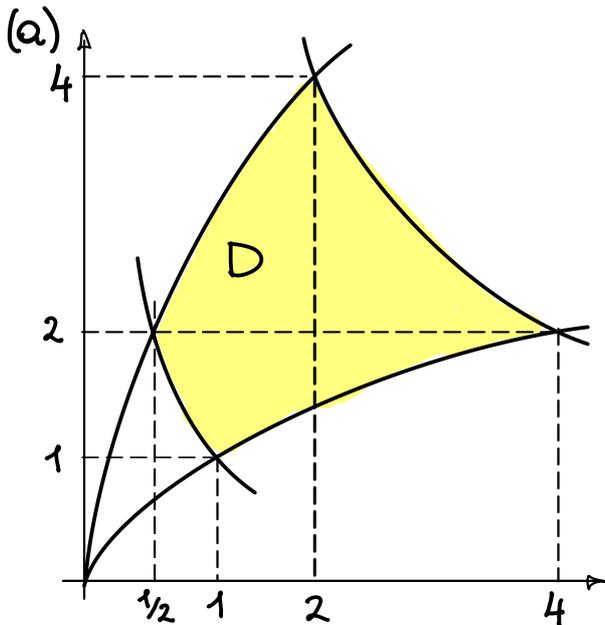
(a) Disegnare  $D$  e calcolare

$$\iint_D \frac{x^2 y}{x + y^2} dx dy$$

usando il cambio di variabili  $u = y^2/x$  e  $v = xy$ .

(b) Trovare un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  tale che  $\mathbf{F}(2, 1) = (1, 3)$  e

$$\int_{\partial^+ D} \langle \mathbf{F}, d\mathbf{s} \rangle = \iint_D \frac{x^2 y}{x + y^2} dx dy.$$



$$\begin{cases} u = \frac{y^2}{x} \\ v = xy \end{cases} \iff \begin{cases} x = \bar{u}^{-1/3} v^{2/3} \\ y = \bar{u}^{1/3} v^{1/3} \end{cases}$$

$$J_{\bar{\phi}}(u, v) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \bar{u}^{-4/3} v^{2/3} & \frac{2}{3} \bar{u}^{-1/3} v^{-1/3} \\ \frac{1}{3} \bar{u}^{-2/3} v^{1/3} & \frac{1}{3} \bar{u}^{1/3} v^{-2/3} \end{bmatrix}$$

$$|\det(J_{\bar{\phi}})| = \left| -\frac{1}{9} \bar{u}^{-1} - \frac{2}{9} \bar{u}^{-1} \right| = \frac{1}{3} \bar{u}^{-1}$$

$$J_{\bar{\phi}}^{-1}(D) = [1, 8] \times [1, 8]$$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{x^2 y}{x + y^2} dx dy &= \iint_{[1, 8] \times [1, 8]} \frac{v}{1 + u} \cdot \frac{1}{3} \bar{u}^{-1} du dv = \frac{1}{3} \int_1^8 v dv \cdot \int_1^8 \frac{1}{u(1+u)} du \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{v^2}{2} \right]_1^8 \cdot \left[ \log\left(\frac{u}{u+1}\right) \right]_1^8 = 21 \log(4/3). \end{aligned}$$

$\hookrightarrow \frac{1}{u} - \frac{1}{u+1}$

(b) Per il teo. di Gauss-Green basta trovare  $\bar{\mathbf{F}} = (F_1, F_2)$  tale che  $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{x^2 y}{x + y^2}$  e  $F_1(2, 1) = 1$ ,  $F_2(2, 1) = 3$ .

Ad esempio si può fissare  $F_2 = 3$  e ottenere  $F_1$  integrando:

$$F_1 = - \int \frac{x^2 y}{x + y^2} dy = -x^2 \cdot \frac{1}{2} \log(x + y^2) + c.$$

Imponendo  $F_1(2, 1) = 1$  si ottiene  $c = 2 \log(3) + 1$ . Così

$$\bar{\mathbf{F}}(x, y) = \left( -\frac{x^2}{2} \log(x + y^2) + 2 \log(3) + 1, 3 \right).$$

**Esercizio 4.** Sia  $S = \{(x, y, z) : (x^2 + y^2)(z + 1)^2 = 4, 0 \leq z \leq 1\}$ .  
La superficie  $S$  è orientata in modo che  $\langle \mathbf{n}, \mathbf{k} \rangle \geq 0$  in ogni suo punto.

(a) Calcolare  $\iint_S (x^2 + y^2)^2 dS$ .

(b) Calcolare  $\iint_S \langle \text{rot}(\mathbf{F}), d\mathbf{S} \rangle$  dove  $\mathbf{F}(x, y, z) = (ze^x, 4xy^2, z)$ .

(a) Parametizzazione di  $S$ :

$$(x^2 + y^2)(z + 1)^2 = 4 \quad \overset{0 \leq z \leq 1}{\Rightarrow} \quad z = -1 \pm \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Così  $\vec{\sigma}(x, y) = (x, y, -1 + \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}})$  con  $A = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$  e

$$\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y = \left( \frac{2x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \frac{2y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, 1 \right) \quad \text{orientazione corretta}$$

$$\|\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y\| = \left( \frac{4x^2 + 4y^2}{(x^2 + y^2)^3} + 1 \right)^{1/2} = \left( 1 + \frac{4}{\rho^4} \right)^{1/2}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \iint_S (x^2 + y^2)^2 dS &= \iint_A (x^2 + y^2)^2 \|\vec{\sigma}_x \times \vec{\sigma}_y\| dx dy \stackrel{CP}{=} \int_{\rho=1}^2 \int_{\theta=0}^{2\pi} \rho^4 \left( 1 + \frac{4}{\rho^4} \right)^{1/2} \rho d\rho d\theta \\ &= 2\pi \int_1^2 (\rho^4 + 4)^{1/2} \rho^3 d\rho = \frac{2\pi}{4} \left[ \frac{(\rho^4 + 4)^{3/2}}{3/2} \right]_1^2 = \frac{7 \cdot 5^{3/2}}{3} \pi. \end{aligned}$$

(b) Il bordo di  $S$  è dato da due circonferenze

$$\gamma_1: z=1, x^2 + y^2=1 \quad \gamma_2: z=0, x^2 + y^2=4$$

Vista l'orientazione di  $S$ ,  $\gamma_1$  è orientata in senso antiorario e  $\gamma_2$  in senso orario:

$$\vec{\gamma}_1(t) = (\cos t, \sin t, 1) \quad t \in [2\pi, 0]$$

$$\vec{\gamma}_2(t) = (2\cos t, 2\sin t, 0) \quad t \in [0, 2\pi]$$

Così per il teo. del rotore,

$$\iint_S \langle \text{rot}(\vec{F}), d\vec{S} \rangle = \int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = 16\pi - \pi = 15\pi$$

perché

$$\int_{\gamma_2} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = \int_0^{2\pi} \langle (0, 32 \cos t \sin^2 t, 0), (-2 \sin t, 2 \cos t, 0) \rangle dt$$
$$= 16 \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = 16\pi$$

e

$$\int_{\gamma_4} \langle \vec{F}, d\vec{s} \rangle = - \int_0^{2\pi} \langle (e^{\cos t}, 4 \cos t \sin^2 t, 1), (-\sin t, \cos t, 0) \rangle dt$$
$$= - \left[ e^{\cos t} \right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin^2(2t) dt = 0 - \pi = -\pi.$$