Analisi Matematica 1

Esercizi di riepilogo - Terza parte

Esercizio 1. Sia
$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x^2 - |x+2|}{x^2+2}\right).$$

a) Determinare il dominio di f.
b) Quali sono gli asintoti di f?

a) Il denominatore $x^2 + 2$ è sempre diverso da zero. Inoltre, dato che la funzione arcoseno è definita nell'intervallo $[-1, 1]$, dobbiamo imporre che valga la doppia disequazione

$$-1 \leq \frac{x^2 - |x+2|}{x^2+2} \leq 1$$

ossia

$$-(x^2+2) \leq x^2 - |x+2| \leq x^2 + 2$$

e quindi

$$-2 \leq |x+2| \leq 2x^2 + 2.$$

La disuguaglianza a sinistra è sempre soddifatta e dunque rimane da risolvere quella a destra. Spezziamo l'analisi a seconda del segno dell'argomento del modulo:

$$\begin{cases} x+2 < 0 \\ -x-2 \leq 2x^2+2 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x+2 \leq 2x^2+2 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} x < -2 \\ 2x^2+x+4 \geq 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \geq -2 \\ (2x-1)x \geq 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x < -2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x \geq -2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 1/2 \end{cases}$$

Dunque il dominio è

$$D = (-\infty, 0] \cup [1/2, +\infty).$$

b) La funzione è continua in D e

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Quindi $y = \pi/2$ è l'unico asintoto di f.

Esercizio 2. Calcolare il seguente limite,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n-\log(n))^n(n+9)^n\log(n)}{(n^2+5\log(n))^n-(n^2+2)^n}.$$

Abbiamo che per $n\to+\infty$,

$$\begin{aligned}
\frac{(n-\log(n))^n(n+9)^n\log(n)}{(n^2+5\log(n))^n-(n^2+2)^n} &= \frac{\left(1-\frac{\log(n)}{n}\right)^n\left(1+\frac{9}{n}\right)^n\log(n)}{\left(1+\frac{5\log(n)}{n^2}\right)^n-\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n}\\
&= \frac{\frac{1}{n}(1+o(1))\cdot e^9(1+o(1))\cdot\log(n)}{1+\frac{5\log(n)}{n}+o(\log(n)/n)-\left(1+\frac{2}{n}+o(1/n)\right)}\\
&= \frac{\frac{\log(n)}{n}\cdot e^9\cdot(1+o(1))^2}{\frac{5\log(n)}{n}+o(\log(n)/n)}\\
&= \frac{e^9\cdot(1+o(1))^2}{5+o(1)}\to\frac{e^9}{5},
\end{aligned}$$

dove

$$\begin{aligned}
\left(1-\frac{\log(n)}{n}\right)^n &= \exp\left(n\log\left(1-\frac{\log(n)}{n}\right)\right)\\
&= \exp\left(-\log(n)+\frac{\log^2(n)}{2n}+o(\log^2(n)/n)\right)=\frac{1}{n}(1+o(1)),\\
\left(1+\frac{9}{n}\right)^n &= \exp\left(n\log\left(1+\frac{9}{n}\right)\right)=\exp\left(9+o(1)\right)=e^9(1+o(1)),\\
\left(1+\frac{5\log(n)}{n^2}\right)^n &= \exp\left(n\log\left(1+\frac{5\log(n)}{n^2}\right)\right)\\
&= \exp\left(\frac{5\log(n)}{n}+o(\log(n)/n)\right)=1+\frac{5\log(n)}{n}+o(\log(n)/n),\\
\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^n &= \exp\left(n\log\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\right)=\exp\left(\frac{2}{n}+o(1/n)\right)=1+\frac{2}{n}+o(1/n).
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine $n = 6$ in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = (\cos(x))^x.$$

Per $x \to 0$, abbiamo che

$$\begin{aligned}
f(x) &= \exp(x \log(\cos(x))) = \exp\left(x \log\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)\right) \\
&= \exp\left(x\left(\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2 + o(x^5)\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^5}{8} + o(x^6)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^6)\right) \\
&= 1 + \left(-\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^6)\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + o(x^6)\right)^2 + o(x^6) \\
&= 1 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^6}{8} + o(x^6).
\end{aligned}$$

dove sono stati utilizzati gli sviluppi per $t \to 0$,

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3) \quad \text{e} \quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Quindi il polinomio di Taylor di ordine 6 in $x_0 = 0$ di f è

$$T_6(x) = 1 - \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^6}{8}.$$

Esercizio 4. Fare un esempio di due numeri interi positivi n e m tali che il sistema

$$\begin{cases} z^n = 1 \\ z^m = -1 \end{cases}$$

abbia esattamente 4 soluzioni e determinare tali soluzioni.

Sappiamo che se n e m sono numeri interi positivi allora l'equazione $z^n = 1$ ha n soluzioni distinte e $z^m = -1$ ha m soluzioni distinte in ogni caso posizionate lungo la circonferenza unitaria $|z| = 1$. Per avere esattamente 4 soluzioni in comune possiamo porre $m = 4$ e fare in modo che le soluzioni di $z^4 = -1$ siano anche soluzioni di $z^n = 1$.
Notiamo che se $z^4 = -1$ allora

$$z^8 = (z^4)^2 = (-1)^2 = 1.$$

Dunque ponendo $n = 8$ abbiamo che il sistema ha esattamente 4 soluzioni.
Infatti, per $n = 8$ e $m = 4$ abbiamo che

$$\begin{cases} z^8 = 1 \\ z^4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow z^4 = -1 = e^{i\pi} \Leftrightarrow z_k = e^{i(\pi+2\pi k)/4} \text{ con } k = 0, 1, 2, 3$$

ossia

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}},\ z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},\ z_2 = \frac{-1-i}{\sqrt{2}},\ z_3 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Esercizio 5. Risolvere il problema di Cauchy per $x \in (0, +\infty)$,

$$\begin{cases} y'(x) = 4x - \dfrac{2y(x)}{3\sqrt[3]{x}} \\ y(1) = 5 \end{cases}$$

Risistemando i termini si ha

$$y'(x) + \frac{2y(x)}{3\sqrt[3]{x}} = 4x.$$

Una primitiva di $a(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}/3$ per $x > 0$ è

$$A(x) = \int \frac{2}{3}x^{-1/3}\,dx = x^{2/3}.$$

Così il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = e^{x^{2/3}}.$$

Quindi, ponendo $s = x^{2/3}$, integriamo

$$\begin{aligned} \int e^{A(x)} f(x)\,dx = \int e^{x^{2/3}} 4x\,dx &= 4 \int e^s 4s^{3/2}\,\frac{3s^{1/2}}{2} ds \\ &= 6 \int s^2 e^s\,ds = 6(s^2 - 2s + 2)e^s + c \\ &= 6(x^{4/3} - 2x^{2/3} + 2)e^{x^{2/3}} + c. \end{aligned}$$

Allora la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x)\,dx = 6(x^{4/3} - 2x^{2/3} + 2) + ce^{-x^{2/3}}.$$

Imponendo la condizione $y(1) = 5$ abbiamo che

$$5 = y(1) = 6 + ce^{-1} \implies c = -e$$

e la soluzione cercata in $(0, +\infty)$ è

$$y(x) = 6(x^{4/3} - 2x^{2/3} + 2) - e^{1 - x^{2/3}}.$$

Esercizio 6. Trovare tutti i punti critici della funzione $f(x,y) = 2x\log(2-y^2)+x^2$ e studiarne la natura.

Abbiamo che per $2 - y^2 > 0$,

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x\log(2-y^2)+x^2\right) = 2\log(2-y^2)+2x,$$
$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x\log(2-y^2)+x^2\right) = \frac{2x(-2y)}{2-y^2} = \frac{4xy}{y^2-2}.$$

I punti critici si ottengono risolvendo $\nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y)) = (0,0)$ ossia

$$\begin{cases} 2\log(2-y^2)+2x = 0 \\ \dfrac{4xy}{y^2-2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\log(2-y^2)+2x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2\log(2-y^2)+2x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ossia

$$\begin{cases} 2-y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} 2\log(2)+2x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x = -\log(2) \\ y = 0 \end{cases}$$

e quindi i punti critici sono: $(0,1)$, $(0,-1)$ e $(-\log(2),0)$.
Inoltre le derivate seconde di f sono:

$$f_{xx}(x,y) = 2,$$
$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = \frac{4y}{y^2-2},$$
$$f_{yy}(x,y) = 4x\frac{y^2-2-2y^2}{(y^2-2)^2} = -\frac{4x(y^2+2)}{(y^2-2)^2}.$$

Calcoliamo la matrice hessiana $H_f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$ nei punti critici:

$$H_f(0,\pm 1) = \begin{bmatrix} 2 & \mp 4 \\ \mp 4 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_f(-\log(2),0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\log(2) \end{bmatrix}.$$

Dato che $\det(H_f(0,\pm 1)) = -16 < 0$ allora $(0,\pm 1)$ sono punti di sella.
Dato che $\det(H_f(-\log(2),0)) = 4\log(2) > 0$ e $f_{xx}(-\log(2),0) = 2 > 0$ allora $(-\log(2),0)$ è un punto di minimo relativo.