Analisi Matematica 1

Esercizi di riepilogo - Seconda parte

Esercizio 1. Sia
$$f(x) = 4x - \log(|e^{2x} - 1|).$$

a) Trovare tutti gli asintoti di f.
b) Determinare $f((0, +\infty))$.
c) Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$.

a) Per il dominio dobbiamo imporre che $e^{2x} - 1 \neq 0$ ossia $x \neq 0$ da cui $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Abbiamo che
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$$
e quindi $x = 0$ è un asintoto verticale.
Inoltre per $x \to +\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y = 2x$:
$$f(x) = 4x - \log(e^{2x} - 1) = 4x - 2x - \log(1 - e^{-2x}) = 2x + o(1).$$
Mentre per $x \to -\infty$ c'è l'asintoto obliquo $y = 4x$:
$$f(x) = 4x - \log(1 - e^{2x}) = 4x + o(1).$$

b) Per $x \neq 0$,
$$f'(x) = 4 - \frac{2e^{2x}}{e^{2x} - 1} = \frac{2(e^{2x} - 2)}{e^{2x} - 1}$$
pertanto f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$ e in $\left[\frac{\log(2)}{2}, +\infty\right)$ e f è strettamente decrescente in $\left(0, \frac{\log(2)}{2}\right]$. Quindi $x = \frac{\log(2)}{2}$ è un punto di minimo relativo con $f\left(\frac{\log(2)}{2}\right) = 2\log(2)$.
Inoltre, ricordando che $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, per il teorema del valori intermedi si conclude che
$$f((0, +\infty)) = [f(\log(2)/2), +\infty) = [2\log(2), +\infty).$$

c) Per i limiti calcolati in a) e lo studio della monotonia visto in b), ancora per il teorema del valori intermedi, l'equazione $f(x) = c$ ha
$$\begin{cases} 1 \text{ soluzione per } c < 2\log(2), \\ 2 \text{ soluzioni per } c = 2\log(2), \\ 3 \text{ soluzioni per } c > 2\log(2). \end{cases}$$

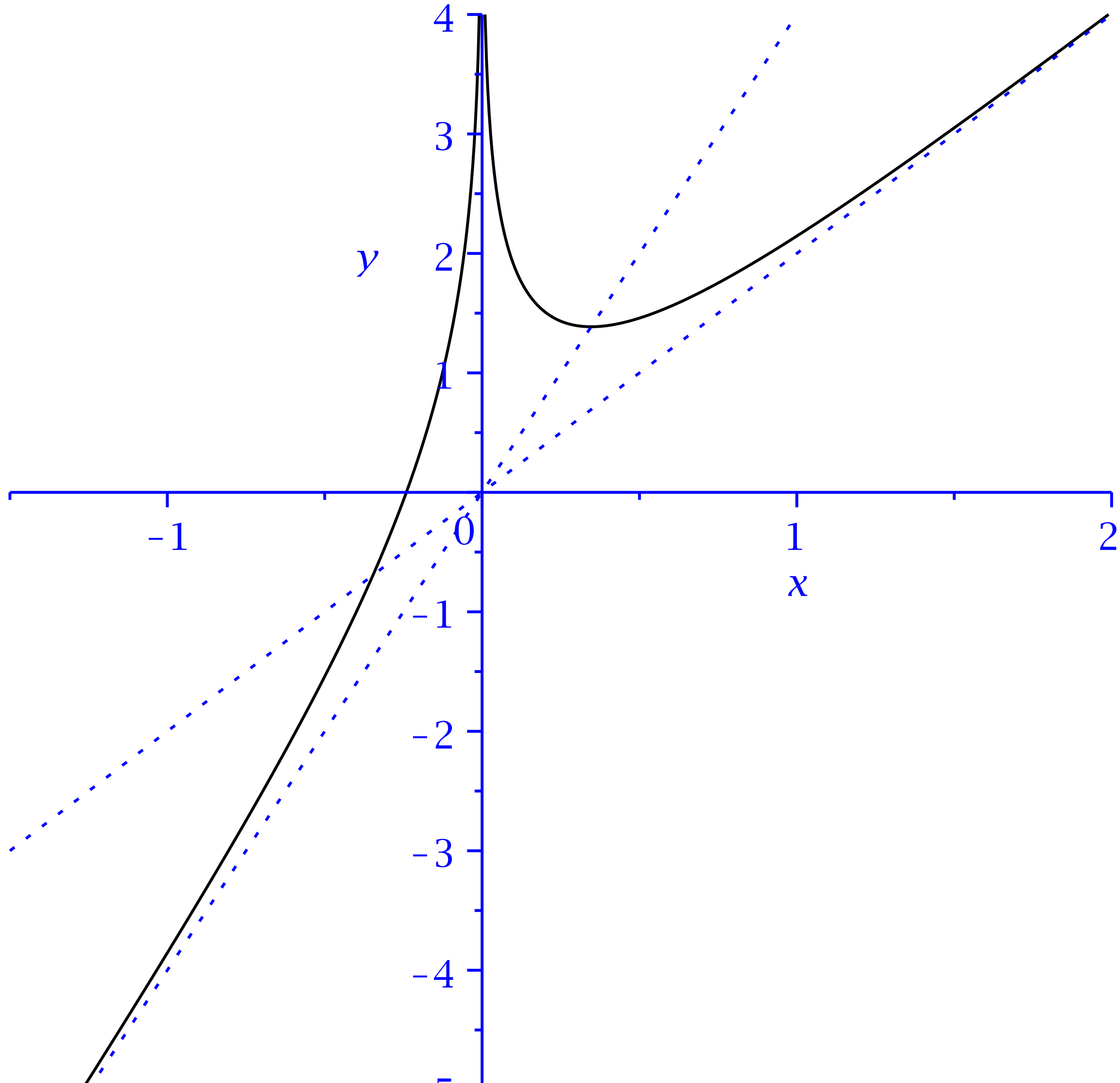

Grafico di $f(x) = 4x - \log(|e^{2x} - 1|)$.

Esercizio 2. Risolvere il seguente problema di Cauchy per $x \in (0, +\infty)$,

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{y(x)}{x^2 + x} = (x^2 + x)e^x \\ y(1) = 2e \end{cases}$$

Prima determiniamo una primitiva di $a(x) = 1/(x^2 + x)$ per $x > 0$,

$$\begin{aligned} A(x) &= \int \frac{1}{x(x+1)}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \log(x) - \log(x+1) = \log\left(\frac{x}{x+1} \right) \end{aligned}$$

e dunque il fattore integrante è

$$e^{A(x)} = \frac{x}{x+1}.$$

Quindi integriamo

$$\begin{aligned} \int e^{A(x)} f(x)\, dx &= \int \frac{x}{x+1} (x^2 + x)e^x\, dx = \int x^2 e^x\, dx \\ &= x^2 e^x - \int 2xe^x\, dx = x^2 e^x - 2xe^x + \int 2e^x\, dx \\ &= (x^2 - 2x + 2)e^x + c. \end{aligned}$$

Dunque la soluzione generale è

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} f(x)\, dx = \frac{x+1}{x} \left((x^2 - 2x + 2)e^x + c \right).$$

Ora imponiamo la condizione $y(1) = 2e$:

$$y(1) = 2\,(e + c) = 2e$$

da cui $c = 0$. Così la soluzione cercata in $(0, +\infty)$ è

$$y(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right) (x^2 - 2x + 2)e^x.$$

Esercizio 3. Discutere la convergenza del seguente integrale improprio al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^4 \frac{(5+3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x-x^2)^\alpha}\,dx$$

e calcolarlo per $\alpha = \frac{1}{2}$.

Nell'intervallo $(0,4)$ i punti da indagare sono due: 0^+ e 4^-.
Per $x \to 0^+$,

$$\frac{(5+3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x-x^2)^\alpha} \sim \frac{5x^{2\alpha-1}}{4^\alpha x^\alpha} = \frac{5}{4^\alpha}\cdot\frac{1}{x^{1-\alpha}}.$$

Quindi la condizione per la convergenza è $1-\alpha < 1$, ossia $\alpha > 0$.
Per $x \to 4^-$, $t = 4-x \to 0^+$,

$$\frac{(5+3\sqrt{x})(\arctan(x))^{2\alpha-1}}{(4x-x^2)^\alpha} \sim \frac{C}{t^\alpha}$$

e la condizione per la convergenza è $\alpha < 1$.
Così, l'integrale improprio dato è convergente se e solo se $0 < \alpha < 1$.

Ora calcoliamo l'integrale per $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 \frac{5+3\sqrt{x}}{(4x-x^2)^{1/2}}\,dx &= 5\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} + 3\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{4-x}} \\
&= 5\int_0^4 \frac{dx}{2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}-1\right)^2}} + 3\left[-2\sqrt{4-x}\right]_0^4 \\
&= 5\left[\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)\right]_0^4 + 12 \\
&= 5\pi + 12.
\end{aligned}$$

Esercizio 4. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ con centro $x_0 = \frac{\pi}{4}$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sin(2x)}.$$

Ponendo $t = x - \frac{\pi}{4}$, si ha che

$$f(x) = \frac{1}{\sin(2x)} = \frac{1}{\sin(2t + \frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos(2t)}.$$

Inoltre, ricordando che $(1+s)^{-1} = 1 - s + s^2 + o(s^2)$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(2t)} &= \frac{1}{1 - \frac{(2t)^2}{2!} + \frac{(2t)^4}{4!} + o(t^5)} = \left(1 - 2t^2 + \frac{2t^4}{3} + o(t^5)\right)^{-1} \\
&= 1 - \left(-2t^2 + \frac{2t^4}{3} + o(t^5)\right) + \left(-2t^2 + \frac{2t^4}{3} + o(t^5)\right)^2 + o((t^2)^2) \\
&= 1 + 2t^2 - \frac{2t^4}{3} + 4t^4 + o(t^4) = 1 + 2t^2 + \frac{10t^4}{3} + o(t^4).
\end{aligned}$$

Ne segue che il polinomio di Taylor di ordine $n = 4$ con centro $x_0 = \frac{\pi}{4}$ di f è

$$T_4(x) = 1 + 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{10}{3}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4.$$

Esercizio 5. Determinare se la seguente serie è convergente

$$\sum_{k=3}^{\infty}\left(\exp\left(\frac{k^2+3k}{k^2+1}\right)-\exp\left(\frac{k}{k-2}\right)\right).$$

Per $k \to \infty$,

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{k^2+3k}{k^2+1}\right)-\exp\left(\frac{k}{k-2}\right) &= e\cdot\left(\exp\left(\frac{k^2+3k}{k^2+1}-1\right)-\exp\left(\frac{k}{k-2}-1\right)\right)\\
&= e\cdot\left(\exp\left(\frac{3k-1}{k^2+1}\right)-\exp\left(\frac{2}{k-2}\right)\right)\\
&= e\cdot\left(1+\frac{3k-1}{k^2+1}+o(1/k)-\left(1+\frac{2}{k-2}+o(1/k)\right)\right)\\
&= e\cdot\left(\frac{3k-1}{k^2+1}-\frac{2}{k-2}+o(1/k)\right)\\
&\sim e\cdot\left(\frac{3}{k}-\frac{2}{k}\right)=\frac{e}{k}
\end{aligned}$$

e quindi, per il criterio del confronto asintotico, dato che la serie $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=+\infty$, anche la serie data diverge.

Esercizio 6. Dimostrare che per ogni intero $n \geq 1$,

$$\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}.$$

Dimostriamo separatamente le due disuguaglianze.

1) $\forall n \geq 1, \quad \sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Passo base. Verifichiamo $P(1)$: $\sqrt{1} = 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1}}$.
Passo induttivo. Dimostriamo che per $n \geq 1$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato l'ipotesi induttiva. Resta da verificare che

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$$

ossia

$$\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \geq n + 1 \Leftrightarrow \sqrt{n^2+n} \geq n \Leftrightarrow n^2 + n \geq n^2$$

che è vera.

2) $\forall n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$.

Passo base. Verifichiamo $P(1)$: $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 < 2 = 2\sqrt{1}$.
Passo induttivo. Dimostriamo che per $n \geq 1$ se vale $P(n)$ allora vale anche $P(n+1)$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo applicato l'ipotesi induttiva. Resta da verificare che

$$2\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq 2\sqrt{n+1}$$

ossia

$$\begin{aligned} &2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1 \leq 2n + 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{n^2+n} \leq 2n + 1 \\ &\Leftrightarrow 4n^2 + 4n \leq (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 \end{aligned}$$

che è vera.