ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 26

ESEMPI

- Per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{x^a|x-1|^{4a}}\,dx \text{ è convergente?}$$

I punti da indagare per la convergenza sono: 0^+, $1^\pm$ e $+\infty$.

Per $x \to 0^+$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a|x-1|^{4a}} \sim \frac{1-(1-x)}{x^a \cdot 1} = \frac{1}{x^{a-1}}$$

convergenza per $a-1<1$ ossia $a<2$

Per $x \to 1^\pm$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a|x-1|^{4a}} \sim \frac{1-e^{-1}}{1 \cdot |x-1|^{4a}} = \frac{c}{|x-1|^{4a}}$$

convergenza per $4a<1$ ossia $a<\frac{1}{4}$

Per $x \to +\infty$

$$\frac{1-e^{-x}}{x^a|x-1|^{4a}} \sim \frac{1}{x^a|x|^{4a}} = \frac{1}{x^{5a}}$$

convergenza per $5a>1$ ossia $a>\frac{1}{5}$

Quindi l'integrale in $(0,1)\cup(1,+\infty)$ è convergente se e solo se

$$\begin{cases} a<2 \\ a<\frac{1}{4} \\ a>\frac{1}{5} \end{cases} \iff \boxed{\frac{1}{5}<a<\frac{1}{4}}$$

- Per quali $a>0$ l'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \frac{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right|^a}{x^{1/3}}\,dx \text{ è convergente?}$$

L'unico punto da indagare è $+\infty$.
Notiamo che per $t \to 0$
$$\operatorname{sen}(t) = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3) \implies \operatorname{sen}(t) - t \sim -\frac{t^3}{6}.$$
Così per $x \to +\infty$
$$\frac{\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right|^a}{x^{1/3}} \sim \frac{\frac{1}{6^a}\cdot\frac{1}{x^{3a}}}{x^{1/3}} = \frac{C}{x^{3a+\frac{1}{3}}}$$
e l'integrale in $[1,+\infty)$ è convergente se $3a+\frac{1}{3}>1$ ossia se $a>\frac{2}{9}$.

- Per quali $a>0$ l'integrale improprio
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(a-3)x}}{(1-e^{-x})\left(\log\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)^a}\,dx \text{ è convergente?}$$

I punti da indagare per la convergenza sono: 0^+ e $+\infty$.

Per $x \to 0^+$,
$$\frac{e^{(a-3)x}}{\underbrace{(1-e^{-x})}_{\sim x}\underbrace{\left(\log\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)^a}_{\sim \log\left(\frac{1}{x}\right)=-\log(x)=|\log(x)|}} \sim \frac{1}{x|\log(x)|^a}$$
convergenza per $a>1$

Per $x \to +\infty$,

$$\frac{e^{(a-3)x}}{(1-e^{-x})\left(\log\left(2+\frac{1}{x}\right)\right)^a} \sim \frac{e^{(a-3)x}}{1\cdot(\log(2))^a}$$

convergenza per $a-3<0$ ossia $a<3$

Quindi l'integrale in $(0,+\infty)$ è convergente se e solo se

$$\boxed{1<a<3}$$

- Per quali $a>0$ l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(1+x^a)^{1/4}-1}{\log(e^{x^2}+x^3)\log^2(x+2)}\,dx$$

è convergente?

I punti da indagare per la convergenza sono: 0^+ e $+\infty$.

Per $x \to 0^+$

$\sim 1+\frac{1}{4}x^a$

$$\frac{(1+x^a)^{1/4}-1}{\log(e^{x^2}+x^3)\log^2(x+2)} \sim \frac{\cancel{1}+\frac{1}{4}x^a-\cancel{1}}{x^2\cdot\log^2(2)} = \frac{c}{x^{2-a}}$$

$\log(1+x^2+o(x^2)+x^3) \sim \log(1+x^2) \sim x^2$

convergenza per $2-a<1$ ossia $a>1$.

Per $x \to +\infty$

$$\frac{(1+x^a)^{1/4}-1}{\log(e^{x^2}+x^3)\log^2(x+2)} \sim \frac{x^{\frac{a}{4}}}{x^2\log^2(x)} = \frac{1}{x^{2-\frac{a}{4}}\log^2(x)}$$

$\sim \log(e^{x^2}) = x^2$

convergenza per $2-\frac{a}{4} \geq 1$ ossia $a \leq 4$.

$\beta = 2 > 1$

Quindi l'integrale in $(0,+\infty)$ è convergente se e solo se

$$\boxed{1<a\leq 4}$$

ESEMPI

- Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$$

$t=\sqrt{x}$, $t^2=x$
$2t\,dt=dx$
$\sqrt{0}=0$, $\sqrt{+\infty}=+\infty$

$$=\int_0^{+\infty} \frac{2\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}(1+t^2)}=2\Big[\operatorname{arctg}(t)\Big]_0^{+\infty}=2\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\pi$$

- Calcolare l'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x^2}\,dx$$

$$=\int_1^{+\infty} \operatorname{arctg}(x)\,d\left(-\frac{1}{x}\right)=\left[-\frac{\operatorname{arctg}(x)}{x}\right]_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty} -\frac{1}{x}\,d(\operatorname{arctg}(x))$$

$$=0+\frac{\pi}{4}+\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \Rightarrow B=-1 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left[\log(x)-\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_1^{+\infty}$$

$$=\frac{\pi}{4}+\left[\log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right]_1^{+\infty}=\frac{\pi}{4}-\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}+\frac{\log(2)}{2}$$

• Calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-2}^{2} \frac{\log(x+2)}{\sqrt{2-x}}\,dx$$

$t=\sqrt{2-x}$
$x=2-t^2$
$2t\,dt=-dx$

$$\stackrel{\curvearrowright}{=} \int_{2}^{0} \frac{\log(4-t^2)}{\cancel{t}}(-2\cancel{t}\,dt)$$

$$= 2\int_{0}^{2} \log(4-t^2)\,dt$$

Determiniamo prima l'integrale indefinito:

$$\int \log(4-t^2)\,dt = t\log(4-t^2) - \int t\,d(\log(4-t^2))$$

$$= t\log(4-t^2) - \int \frac{t\cdot(-2t)}{\underbrace{4-t^2}_{-(t-2)(t+2)}}\,dt$$

$$= t\log(4-t^2) - 2\int \left(1 + \frac{\overset{=1}{A}}{t-2} + \frac{\overset{=-1}{B}}{t+2}\right)dt$$

$t\in[0,2)$

$$= t\log(\underbrace{4-t^2}_{(2-t)(2+t)}) - 2t - 2\log|\underbrace{t-2}_{2-t}| + 2\log|\underbrace{t+2}_{t+2}| + c$$

$$= (t-2)\log(2-t) + (t+2)\log(t+2) - 2t + c$$

Così

$$\int_{-2}^{2} \frac{\log(x+2)}{\sqrt{2-x}}\,dx = 2\Big[(t-2)\log(2-t)+(t+2)\log(t+2)-2t\Big]_{0}^{2^-}$$

$$= 2\left(4\log(4)-4\right) = 16\log(2) - 8.$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x^2}\int_2^{x^2} \frac{1}{\log(t)}\,dt$$

Notiamo che se $F(x)=\int_2^{x}\frac{1}{\log(t)}\,dt$ allora

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_2^{+\infty}\frac{1}{\log(t)}\,dt \underset{\alpha=0,\ \beta=1}{=} +\infty \quad e \quad F'(x)=\frac{1}{\log(x)}$$

inoltre $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\log(x)}=+\infty$.

Quindi per il limite dato possiamo applicare de l'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x^2)}{\frac{x^2}{\log(x)}} \overset{H}{\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{F'(x^2)\cdot 2x}{\frac{2x\log(x)-x^2\cdot 1/x}{\log^2(x)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2}x}{\underbrace{\log(x^2)}_{\cancel{2}\cancel{\log}(x)}}\cdot\frac{\log^{\cancel{2}}(x)}{2x\log(x)-x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\log(x)}{2x\log(x)-x}=\frac{1}{2}.$$