ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 25

OSSERVAZIONE

Se $f(x) \geq 0$ in $[a,b)$ allora la funzione integrale $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ è crescente in $[a,b)$ perché

$$a \leq t_1 < t_2 < b \Rightarrow F(t_2) - F(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{f(x)}_{\geq 0}\,dx \geq 0$$

La crescenza di F implica l'esistenza del limite

$$\lim_{t\to b^-} F(t) = \int_a^b f(x)\,dx \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

convergente divergente

l'int. improprio non può essere indeterminato

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DEL CONFRONTO PER GLI INT. IMPROPRI)

Siano f, g funzioni definite in $[a,b)$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tali che siano integrabili in $[a,t]$ $\forall t \in (a,b)$ e $\forall x \in [a,b)$ $0 \leq f(x) \leq g(x)$.

1) Se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge allora $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

2) Se $\int_a^b f(x)\,dx = +\infty$ allora $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty$.

dim. Consideriamo le funzioni integrali:

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx \quad e \quad G(t) = \int_0^t g(x)\,dx.$$

Allora

$$a \leq t < b \Rightarrow G(t) - F(t) = \int_a^t \underbrace{(g(x) - f(x))}_{\geq 0}\,dx \geq 0.$$

Quindi

$$\int_a^b g(x)\,dx = \overset{\text{esistono per l'osservazione precedente}}{\lim_{t\to b^-} G(t) \geq \lim_{t\to b^-} F(t)} = \int_a^b f(x)\,dx$$

da cui seguono 1) e 2). $\square$

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

- $$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(\log(x))^\beta}\,dx = \begin{cases} \text{converge} & \text{se } \alpha>1 \text{ e } \forall \beta\in\mathbb{R} \quad (1) \\ +\infty & \text{se } \alpha<1 \text{ e } \forall\beta\in\mathbb{R} \quad (2) \end{cases}$$

Se $\alpha>1$ allora per $x\to+\infty$

$$\frac{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}{x^\alpha(\log(x))^\beta} = \frac{x^{\overbrace{\frac{1-\alpha}{2}}^{<0}}}{(\log(x))^\beta} \to 0$$

Per definizione di limite, per $\varepsilon=1$ $\exists r>2$ tale che

$$\forall x>r \quad \frac{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}{x^\alpha(\log(x))^\beta} \leq 1 \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{x^\alpha(\log(x))^\beta} \leq \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}.$$

Dato che $\frac{\alpha+1}{2}>1$, $\int_r^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}\,dx$ è convergente e per il teo. del confronto vale (1).

Se $\alpha<1$ allora per $x\to+\infty$

$$\frac{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}{x^\alpha(\log(x))^\beta} = \frac{x^{\overbrace{\frac{1-\alpha}{2}}^{>0}}}{(\log(x))^\beta} \to +\infty$$

Per definizione di limite, per $M=1$ $\exists r>2$ tale che

$\forall x > r \quad \dfrac{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}{x^\alpha (\log(x))^\beta} \geq 1$ ossia $\dfrac{1}{x^\alpha (\log(x))^\beta} \geq \dfrac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}}$.

Dato che $\frac{\alpha+1}{2} < 1$, $\displaystyle\int_r^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{\alpha+1}{2}}} dx = +\infty$ e per il teo. del confronto vale (2).

OSSERVAZIONE

Dai vari casi visti abbiamo che

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (\log(x))^\beta} dx \text{ converge} \iff \boxed{\begin{array}{c} \alpha > 1 \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \end{array}}$$

In modo simile si verifica che

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log(x)|^\beta} dx \text{ converge} \iff \boxed{\begin{array}{c} \alpha < 1 \\ \text{oppure} \\ \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \end{array}}$$

TEOREMA (DEL CONFRONTO ASINTOTICO)

Siano f, g funzioni definite in $[a,b)$ con $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tali che siano integrabili in $[a,t]$ $\forall t \in (a,b)$ e $\forall x \in [a,b)$ $f(x) \geq 0$, $g(x) > 0$.

Se $\displaystyle\lim_{x \to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0,+\infty)$ ossia $f(x) \sim L g(x)$ per $x \to b^-$

EQUIVALENZA ASINTOTICA

allora

$$\int_a^b f(x) dx \text{ converge} \iff \int_a^b g(x) dx \text{ converge}$$

ESEMPI

- $$\int_0^{+\infty} \left(\frac{3x^2+1}{4x^3+x+1}\right) dx \text{ è convergente? NO}$$
  >0 e continua in $(0,+\infty)$

Per $x \to +\infty$,

$$\frac{3x^2+1}{4x^3+x+1} = \frac{\cancel{x^2}}{x^{\cancel{3}}} \frac{3+\frac{1}{x^2}}{4+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}} \sim \frac{3/4}{x}$$

$\alpha = 1$
int. in $[1,+\infty)$
è divergente

- $$\int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x^3+\sqrt{x}}\right) dx \text{ è convergente? SÍ}$$
  >0 e continua in $(0,+\infty)$

I punti da indagare per la convergenza sono: 0^+ e $+\infty$.

Per $x \to 0^+$

$$\frac{1}{x^3+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^{1/2}}$$

$\alpha = 1/2 < 1$
int. in $(0,1]$
è convergente

Per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{x^3+\sqrt{x}} \sim \frac{1}{x^3}$$

$\alpha = 3 > 1$
int. in $[1,+\infty)$
è convergente

Quindi l'integrale in $(0,+\infty)$ è convergente.

- Per quali $a>0$ l'integrale improprio
$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\sqrt{x}\log(x)}{(x^2-1)^a}\right) dx \text{ è convergente?}$$
>0 e continua in $(1,+\infty)$

I punti da indagare sono: 1^+ e $+\infty$.

Per $x \to 1^+$

$\log(1+(x-1)) \sim (x-1)$

$$\frac{\sqrt{x}\log(x)}{(x^2-1)^a} \sim \frac{1\cdot(x-1)}{2^a(x-1)^a} \sim \frac{c}{(x-1)^{a-1}}$$

$(x+1)(x-1)$

e l'int. in $(1,2]$ è convergente se $a-1<1$ ossia se $a<2$.

Per $x \to +\infty$

$$\frac{\sqrt{x}\log(x)}{(x^2-1)^a} \sim \frac{\sqrt{x}\log(x)}{x^{2a}} \sim \frac{1}{x^{2a-\frac{1}{2}}\log^{-1}(x)}$$

e l'int. in $[2,+\infty)$ è convergente se

$$2a-\frac{1}{2}>1 \quad \text{oppure} \quad 2a-\frac{1}{2}=1 \text{ e } \underbrace{-1>1}_{\text{impossibile}}$$

ossia se $a>\frac{3}{4}$.

Quindi l'integrale in $(1,+\infty)$ è convergente se e solo se valgono entrambe le condizioni

$$\boxed{\frac{3}{4}<a<2}$$

- Per quali $a \in \mathbb{R}$ l'integrale improprio

$$\int_{1/2}^{3/2} \left(\frac{e^x}{\sqrt{x}\,|\mathrm{sen}(\pi x)|^a}\right) dx \text{ è convergente?}$$

>0 e continua in $[1/2,1)\cup(1,3/2]$

Il punto da indagare per la convergenza è: $1^\pm$. Per $x \to 1^\pm$,

$$\frac{e^x}{\sqrt{x}\,|\mathrm{sen}(\pi x)|^a} \sim \frac{c}{|x-1|^a}$$

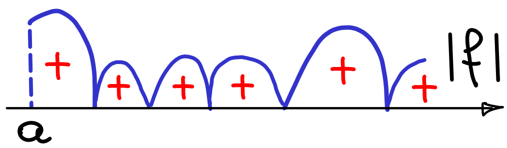
$\mathrm{sen}(\pi x) = -\mathrm{sen}(\pi(x-1)) \sim -\pi(x-1)$

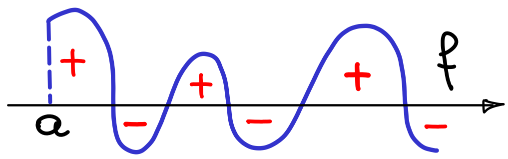
e gli integrali in $[1/2,1)$ e in $(1,3/2]$ sono convergenti se e solo se $a<1$.

OSSERVAZIONE

Il caso in cui la funzione da integrare cambi segno infinite volte nell'intervallo di integrazione è in generale più difficile da analizzare. Si dimostra che

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx \text{ converge} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge}$$





ESEMPIO

$$\bullet \int_\pi^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^\alpha}\,dx = \int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,d(-\cos(x))$$

$$= \left[\frac{-\cos(x)}{x^\alpha}\right]_\pi^{+\infty} - \int_\pi^{+\infty} (-\cos(x))\,d\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi^\alpha} - \alpha \int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx \text{ è convergente } \forall \alpha > 0$$

Infatti:

$$\int_\pi^{+\infty} \left|\frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}\right| dx \underset{|\cos(x)|\leq 1}{\leq} \int_\pi^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\,dx$$

$\alpha > 0 \Rightarrow \alpha + 1 > 1$

convergente

e per (*) anche $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^{\alpha+1}}\,dx$ è convergente.