ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 22

INTEGRAZIONE DELLE FUNZIONI RAZIONALI

L'algoritmo di integrazione di $\frac{P}{Q}$ dove P e Q sono polinomi è basato sulla DECOMPOSIZIONE IN FRATTI SEMPLICI e prevede i seguenti passi:

$\boxed{1}$ Se il grado di P è ≥ al grado di Q si fa la divisione calcolando il quoziente S e il resto R:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \underbrace{S(x)}_{\text{polinomio}} + \underbrace{\frac{R(x)}{Q(x)}}_{\text{funzione razionale con grado R<grado Q}}$$

Se il grado di P è < al grado di Q si pone S=0 e R=P.

$\boxed{2}$ Si fattorizza il polinomio Q in $\mathbb{R}[x]$ (polinomi a coeff. reali)

$$Q = \prod_{k=1}^{N} (\underbrace{x-a_k}_{\substack{\text{fattore di}\\ 1^\circ\text{grado}}})^{m_k} \cdot \prod_{k=1}^{M} (\underbrace{x^2+b_kx+c_k}_{\substack{\text{fattore irriducibile}\\ \text{di } 2^\circ\text{grado}}})^{m_k}$$

PRODUTTORIA

$\Delta_k = b_k^2 - 4c_k < 0$

$\boxed{3}$ Si scrive $\frac{R}{Q}$ come combinazione lineare dei FRATTI SEMPLICI:

$$\frac{1}{(x-a_k)^j} \quad \text{con } j=1,2,\dots,m_k$$

$$\frac{x}{(x^2+b_kx+c_k)^j} \quad \text{e} \quad \frac{1}{(x^2+b_kx+c_k)^j} \quad \text{con } j=1,2,\dots,m_k$$

Il numero di fratti semplici è dato dal grado di Q.
Ad esempio

$$\frac{R(x)}{(x+1)^3(x+2)(x^2+1)^2} = \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2}{(x+1)^2} + \frac{C_3}{(x+1)^3} + \frac{C_4}{x+2} + \frac{C_5 x + C_6}{x^2+1} + \frac{C_7 x + C_8}{(x^2+1)^2}$$

dove $C_1, C_2, \dots, C_8$ sono costanti da determinare.

$\boxed{4}$ Si applica la linearità dell'integrale e si integrano il polinomio S ottenuto al passo 1 e i fratti semplici ottenuti al passo 3.

Per i fratti semplici relativi ai fattori di 1° grado:

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \log|x-a| + c$$

Se $j \geq 2$ allora

$$\int \frac{1}{(x-a)^j}\,dx = \frac{(x-a)^{-j+1}}{-j+1} + c.$$

Per i fratti semplici relativi ai fattori di 2° grado:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{At+E}{t^2+D^2}\,dt$$

$x = t - \frac{b}{2}$

$dx = dt$

senza il termine di 1° grado

$E = -\frac{b}{2}A + B$

$D^2 = -\frac{b^2}{4} + c = -\frac{\Delta}{4} > 0$

$$= \frac{A}{2}\log(t^2+D^2) + \frac{E}{D}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{D}\right) + c$$

e infine si torna alla variabile x con la sostituzione $t=x+\frac{b}{2}$.

Se $j\geq 2$ allora ci si può ricondurre ai seguenti due casi:

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^j}\,dx=\frac{1}{2}\int (x^2+1)^{-j}\,d(x^2+1)=\frac{(x^2+1)^{-j+1}}{2(-j+1)}+c$$

e

$$\int \frac{1\pm x^2}{(x^2+1)^j}\,dx=\underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^{j-1}}\,dx}_{\text{caso di grado minore}}-\underbrace{\int x\cdot\left(\frac{x}{(x^2+1)^j}\right)dx}_{\text{da integrare per parti}}.$$

Ad esempio se $j=2$,

$$\int \frac{1\pm x^2}{(x^2+1)^2}\,dx=\int\frac{1}{x^2+1}\,dx-\int x\left(\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

$$=\operatorname{arctg}(x)-\int x\,d\left(-\frac{1}{2(x^2+1)}\right)$$

$$=\operatorname{arctg}(x)+\frac{x}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x)+\frac{x}{2(x^2+1)}+c. \quad (*)$$

Se $j=3$,

$$\int \frac{1\pm x^2}{(x^2+1)^3}\,dx=\overbrace{\int\frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx}^{=(*)}-\int x\left(\frac{x}{(x^2+1)^3}\right)dx$$

$$= (*) - \int x \, d\left(-\frac{1}{4(x^2+1)^2}\right)$$

$$= (*) + \frac{x}{4(x^2+1)^2} - \frac{1}{4}\overbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\, dx}^{=(*)}$$

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x) + \frac{x}{2(x^2+1)} + c\right) + \frac{x}{4(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{3}{8}\operatorname{arctg}(x) + \frac{3x}{8(x^2+1)} + \frac{x}{4(x^2+1)^2} + c.$$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\displaystyle\int \frac{x^3+11}{x^2-5x+6}\, dx$

Per il passo 1 è necessario dividere

$$\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & +11 & x^2-5x+6 \\
\hline
x^3 & -5x^2 & +6x & & x+5 \\
\hline
/ & +5x^2 & -6x & & \\
 & +5x^2 & -25x & +30 & \\
\hline
 & / & 19x & -19 &
\end{array}$$

E quindi

$$\frac{x^3+11}{x^2-5x+6} = x+5+19\,\frac{x-1}{x^2-5x+6} \quad \text{passo 2}$$

$$x^2-5x+6 \leftarrow (x-2)(x-3)$$

$$= x+5+19\left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}\right) \quad \text{passo 3}$$

Determiniamo A e B

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x-(3A+2B)}{x^2-5x+6} = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$$

da cui

$$\begin{cases} A+B=1 \\ 3A+2B=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=1-A \\ 3A+2(1-A)=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B=2 \\ A=-1 \end{cases}$$

Così per linearità

$$\int \frac{x^3+11}{x^2-5x+6}\,dx = \int (x+5)\,dx - 19\int \frac{dx}{x-2} + 38\int \frac{dx}{x-3}$$

$$= \frac{x^2}{2} + 5x - 19\log|x-2| + 38\log|x-3| + C$$

OSSERVAZIONE

Nell'esempio precedente, A e B si possono ottenere anche sfruttando in modo diverso l'identità: $\forall x \neq 2,3$

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6} = \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

Allora

$$A = \lim_{x\to 2} (x-2) f(x)$$
$$= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \frac{2-1}{2-3} = -1$$

$$B = \lim_{x\to 3} (x-3) f(x)$$
$$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{(x-2)\cancel{(x-3)}} = \frac{3-1}{3-2} = 2.$$

- $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1} \right) dx$

Partendo dall'identità: $\forall x \neq \pm 1$

$$f(x) = \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$$

A, B, C si possono trovare sia risolvendo il sistema

$$A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 = x^2 \iff \begin{cases} A + C = 1 & x^2 \\ B - 2C = 0 & x^1 \\ -A + B + C = 0 & x^0 \end{cases}$$

che calcolando i seguenti limiti

$$B = \lim_{x \to 1} (x-1)^2 f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^2}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$C = \lim_{x \to -1} (x+1) f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}$$

e infine per trovare A valutiamo $f(x)$ per un qualunque $x \neq \pm 1$. Ad esempio per $x=0$,

$$0 = f(0) = -A + B + C = -A + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \Rightarrow A = \frac{3}{4}.$$

Così per linearità

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^2(x+1)}\,dx = \frac{3}{4}\log|x-1| - \frac{1/2}{x-1} + \frac{1}{4}\log|x+1| + c.$$