ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 20

PRIMITIVE

Una funzione F si dice una PRIMITIVA di f in $A \subseteq \mathbb{R}$ se F è derivabile in A e

$$\forall x \in A \quad F'(x) = f(x).$$

ESEMPI

- $\frac{x^3}{3}, \frac{x^3}{3}+4, \frac{x^3}{3}-2$ sono primitive di x^2 in $\mathbb{R}$
- $F(x) = \log|x| + \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } x>0 \\ 1 & \text{se } x<0 \end{cases}$ è una primitiva

di $f(x) = \frac{1}{x}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Infatti se $x>0$ allora

$$F'(x) = \left(\log(x) - \frac{1}{2}\right)' = \frac{1}{x}$$

mentre se $x<0$ allora

$$F'(x) = \left(\log(-x)+1\right)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}.$$

OSSERVAZIONE

Se F è una primitiva di f allora

$$\forall c \in \mathbb{R} \quad (F(x)+c)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

e quindi anche $F+c$ è una primitiva di f.
Anzi TUTTE le primitive di f hanno questa forma: se G è un'altra primitiva di f allora

$$(F(x)-G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

e quindi $F(x)-G(x)$ è identicamente costante su ogni intervallo.

PRIMITIVE DI ALCUNE FUNZIONI ELEMENTARI

f	F
x^b $\quad b\neq -1$	$\frac{x^{b+1}}{b+1}$
$\frac{1}{x+a}$	$\log\lvert x+a\rvert$
e^x	e^x
$\operatorname{sen}(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\operatorname{sen}(x)$

f	F
$\frac{1}{x^2+a^2}$ $\quad a\neq 0$	$\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right)$ $-\arccos\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right)$

Le corrispondenze nella tabella si verificano direttamente con la definizione.
Ad esempio:

$$\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right)' = \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1}{a} = \frac{1}{x^2+a^2}$$

oppure

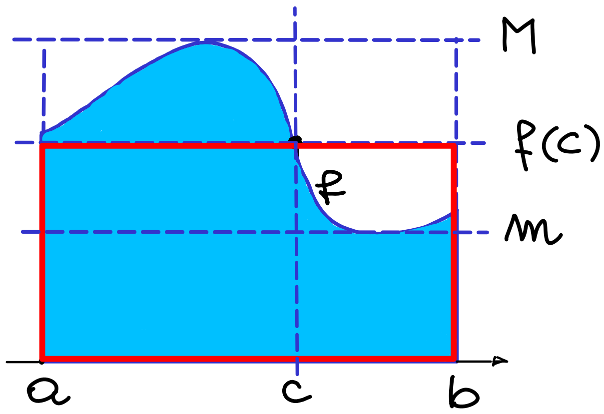
$$\left(\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{\lvert a\rvert}\right)^2}}\cdot\frac{1}{\lvert a\rvert} = \frac{\cancel{\sqrt{a^2}}}{\sqrt{a^2-x^2}}\cdot\frac{1}{\cancel{\lvert a\rvert}}.$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DELLA MEDIA INTEGRALE)

Se f è continua in $[a,b]$ allora $\exists\, c \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

media integrale di f in $[a,b]$



dim. Sia σ la suddivisione data dai soli due punti $x_0 = a < b = x_1$. Allora

$$m(b-a) = s(f,\sigma) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S(f,\sigma) = M(b-a)$$

ossia

$$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$$

dove m e M sono rispettivamente il valore minimo e massimo di f in $[a,b]$. Tali valori esistono per il teorema di Weierstrass.
Dato che per il teorema dei valori intermedi f assume tutti i valori in $[m,M]$, allora

$$\exists\, c \in [a,b] : \quad \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c).$$

$\square$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE)

Sia f una funzione continua in $[a,b]$ e sia I la FUNZIONE INTEGRALE

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Allora

1) I è derivabile in $[a,b]$ e $I'(x) = f(x)$ ossia I è una primitiva di f.

2) Se F è una qualunque primitiva di f allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a).$$

dim.

1) Sia $x \in [a,b]$ e sia $h \neq 0$ tale che $x+h \in [a,b]$. Allora il rapporto incrementale di I è

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c(h))$$

per il teorema della media integrale $\exists\, c(h) \in [x, x+h]$

Se $h \to 0$, per doppio confronto, $c(h) \to x$, e per la continuità di f in x,

$$f(c(h)) \to f(x).$$

Quindi il limite rapporto incrementale di I esiste ed è uguale a $f(x)$:

$$I'(x) = f(x).$$

2) Se F è una primitiva di f allora $\exists c \in \mathbb{R}$ tale che $F(x) = I(x) + c$ e

$$F(b) - F(a) = I(b) + \cancel{c} - \underbrace{I(a)}_{=0} - \cancel{c} = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad \square$$

OSSERVAZIONE

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale segue che il problema del calcolo dell' INTEGRALE DEFINITO

con gli estremi di integrazione $\int_a^b f(x)\,dx$

è ridotto alla ricerca di F, una primitiva di f, e al calcolo della variazione di F agli estremi $F(b) - F(a)$.

Per la ricerca di F introduciamo la notazione di INTEGRALE INDEFINITO

senza gli estremi di integrazione

$$\int f(x)\,dx = \overbrace{F(x) + c}^{\text{TUTTE le primitive}}$$

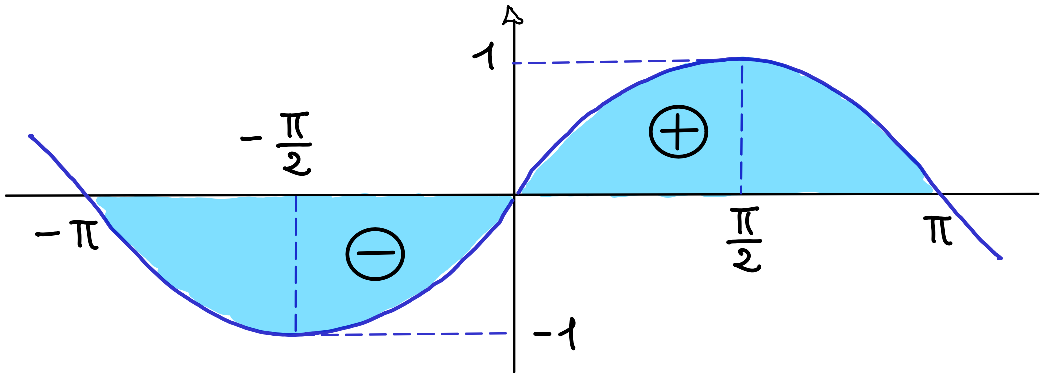
costante arbitraria

ESEMPI

- $\int \text{sen}(x)\,dx = -\cos(x) + c$

$$\int_0^{\pi} \text{sen}(x)\,dx = \Big[-\cos(x)\Big]_0^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(0)) = 1+1=2$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \text{sen}(x)\,dx = \Big[-\cos(x)\Big]_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) - (-\cos(-\pi)) = -1+1=0.$$



- $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + c$ perché $(-e^{-x})' = e^{-x}$

$$I(x) = \int_0^{x} e^{-t}\,dt = \Big[-e^{-t}\Big]_0^{x} = -e^{-x} - (-e^{-0}) = 1 - e^{-x}$$

Osserviamo che $\lim_{x\to+\infty} I(x) = 1$.