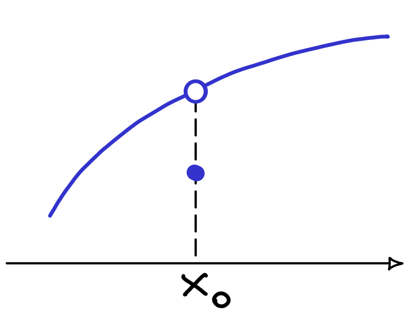
ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 14

PUNTI DI DISCONTINUITÀ

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D$

Se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$ e $L \neq f(x_0)$

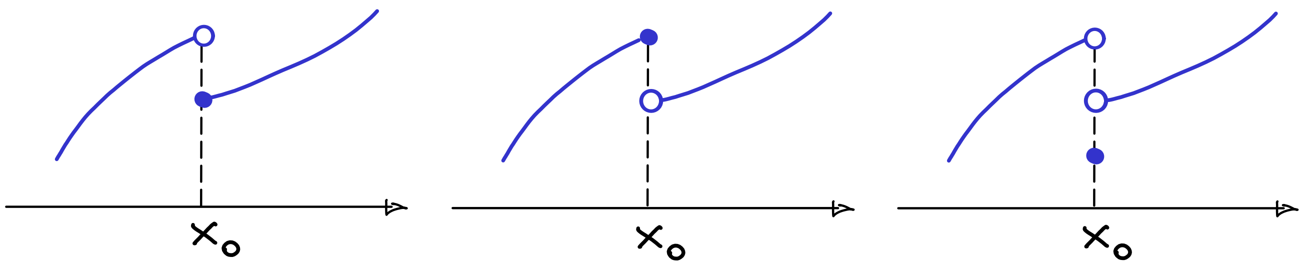
allora x_0 si dice PUNTO DI DISCONTINUITÀ ELIMINABILE.



Esempio: $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$ in $x_0 = 0$.

Se $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L^+ \in \mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L^- \in \mathbb{R}$ e $L^+ \neq L^-$

allora x_0 si dice PUNTO DI DISCONTINUITÀ DI SALTO.



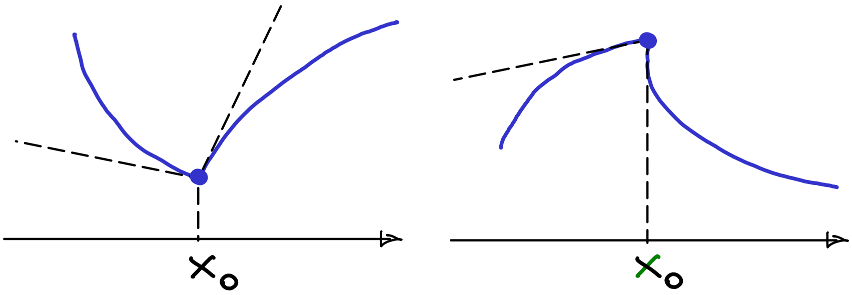
Esempio: $f(x) = \lfloor x \rfloor$ in $x_0 \in \mathbb{Z}$.

PUNTI DI NON DERIVABILITÀ

Supponiamo che f sia continua in x_0 e che

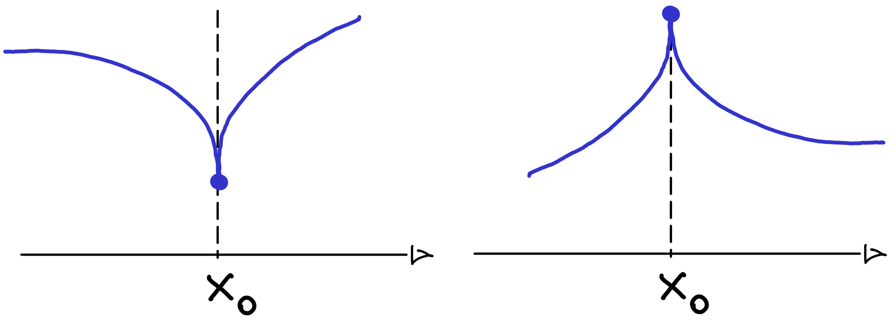
$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x_0) = L^+ \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_0^-} f'(x_0) = L^- \in \overline{\mathbb{R}}$$

1) Se $L^+ \neq L^-$ e almeno uno è finito allora x_0 si dice PUNTO ANGOLOSO



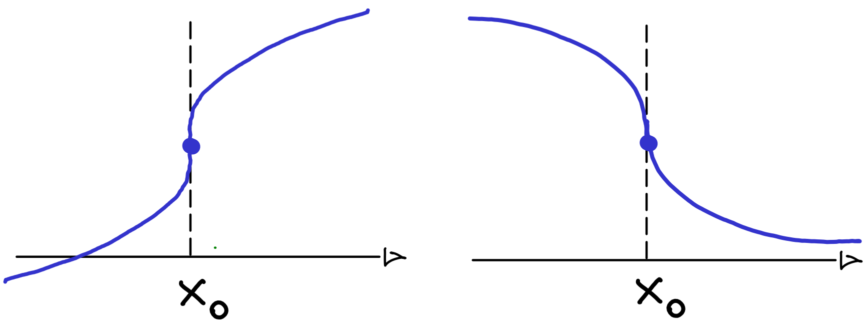
Esempio: $f(x)=|x|$ in $x_0=0$.

2) Se $L^+ \neq L^-$ e entrambi non finiti allora x_0 si dice PUNTO DI CUSPIDE



Esempio: $f(x)=\sqrt{|x|}$ in $x_0=0$.

3) Se $L^+ = L^-$ e entrambi non finiti allora x_0 si dice PUNTO DI FLESSO A TANGENTE VERTICALE



Esempio: $f(x)=\sqrt{x^3}$ in $x_0=0$.

STUDIO DEL GRAFICO

Per tracciare il grafico di una funzione è utile fare i seguenti passi.

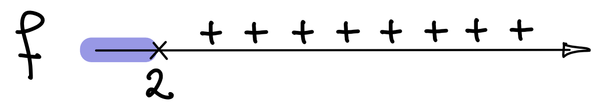
1) Determinare il dominio.
2) Studiare la continuità, le simmetrie e il segno.
3) Valutare i limiti agli estremi del dominio e determinare eventuali asintoti.
4) Studiare la derivabilità, calcolare la derivata prima, studiare la crescenza/decrescenza e determinare i punti di massimo/minimo relativo/assoluto.
5) Calcolare la derivata seconda, studiare la convessità/concavità e determinare i punti di flesso.

ESEMPI

- $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x-2}}$

Dominio: $x > 2 \Rightarrow D = (2, +\infty)$

f è continua in D e il suo segno è



Limiti agli estremi:

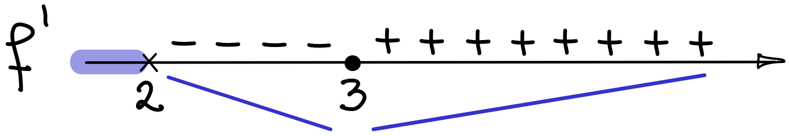
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow x=2 \text{ è un asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ e } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \Rightarrow$$ non c'è asintoto per $x\to+\infty$

Derivata prima: f è derivabile in D e

$$f'(x) = \left((x-1)\cdot(x-2)^{-\frac{1}{2}}\right)' = (x-2)^{-\frac{1}{2}} + (x-1)\cdot\left(-\frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{3}{2}}\left(2(x-2)-(x-1)\right) = \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{3}{2}}(x-3)$$



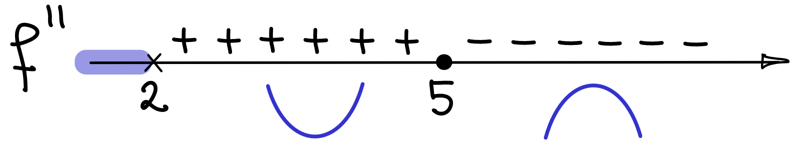
f è decrescente in $(2,3]$ e crescente in $[3,+\infty)$

$x=3$ è un punto di minimo assoluto e $f(3)=2$ è il valore minimo.

Derivata seconda: per $x \in D$

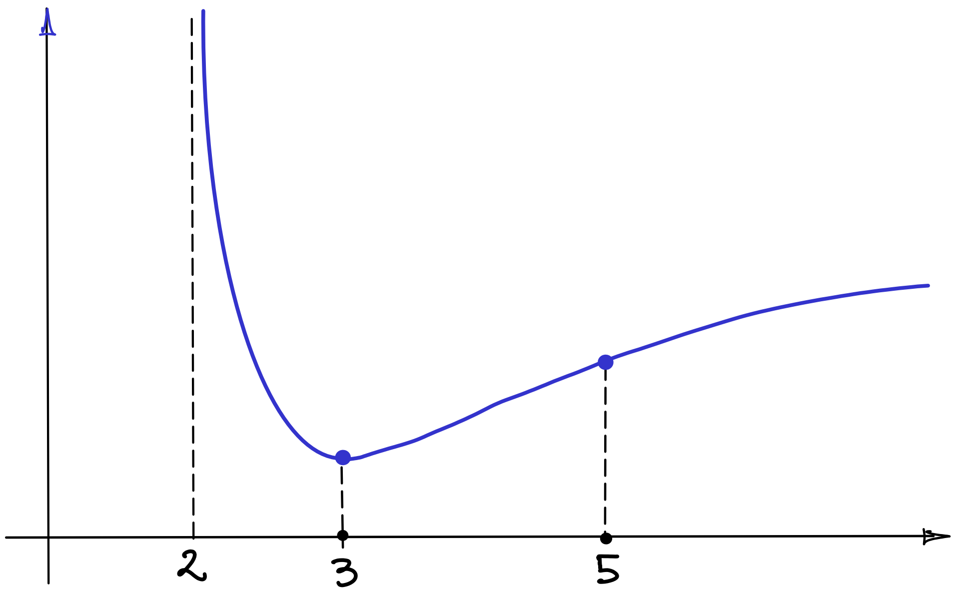
$$f''(x) = -\frac{3}{4}(x-2)^{-\frac{5}{2}}(x-3) + \frac{1}{2}(x-2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4}(x-2)^{-\frac{5}{2}}\cdot\left(3(x-3)-2(x-2)\right) = -\frac{1}{4}(x-2)^{-\frac{5}{2}}\cdot(x-5)$$



f è convessa in $(2,5]$ e concava in $[5,+\infty)$

$x=5$ è un punto di flesso.



- $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{|x-2|}}$ Qual è il grafico di $|f(x)|$?

Dominio: $x\neq 2 \Rightarrow D=(-\infty,2)\cup(2,+\infty)$

f è continua in D e il suo segno è

f $- - - - \;\bullet_{1}\; + + \;\times_{2}\; + + + + + + + +$

Notiamo che per $x>2$, f coincide con la funzione precedente. Studiamo solo il caso $x<2$

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{2-x}}$$

Limiti agli estremi:

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\dfrac{1}{0^+}=+\infty \Rightarrow x=2$ è un asintoto verticale

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$ e $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0 \Rightarrow$ non c'è asintoto per $x\to-\infty$

Derivata prima: per $x<2$

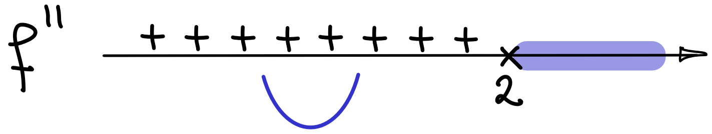
$$f'(x)=(2-x)^{-\frac{1}{2}}+(x-1)\cdot\left(+\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{3}{2}}(3-x)$$

f' $+ + + + + + + + \;\times_{2}$

f è crescente in $(-\infty,2)$

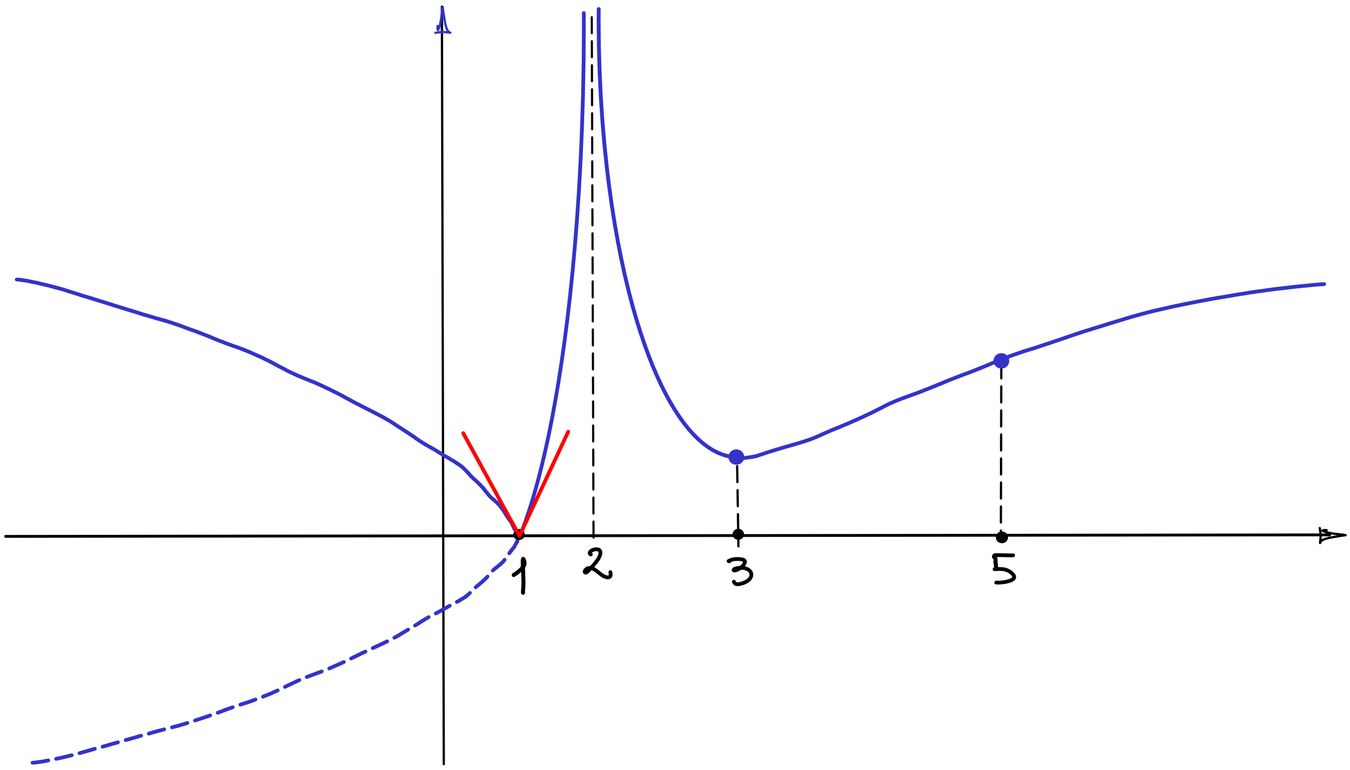
Derivata seconda: per $x<2$

$$f''(x)=+\frac{3}{4}(2-x)^{-\frac{5}{2}}(3-x)-\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{4}(2-x)^{-\frac{5}{2}}(5-x)$$



f'' è convessa in $(-\infty,2)$.

Grafico di $|f(x)|$:



Rispetto a $|f(x)|$, $x=1$ è un punto di minimo assoluto e anche un punto angoloso:

$$f'(1)=\left(\frac{1}{2}(2-x)^{-\frac{3}{2}}(3-x)\right)_{x=1}=1$$

e dunque se $g(x)=|f(x)|$,

$$g'_+(1)=f'(1)=1 \quad \text{e} \quad g'_-(1)=-f'(1)=-1.$$