ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 10

DERIVATA DI UNA FUNZIONE

Sia $f: D \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in D$ un punto di accumulazione di D. f si dice DERIVABILE in x_0 se esiste il seguente limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0)$$

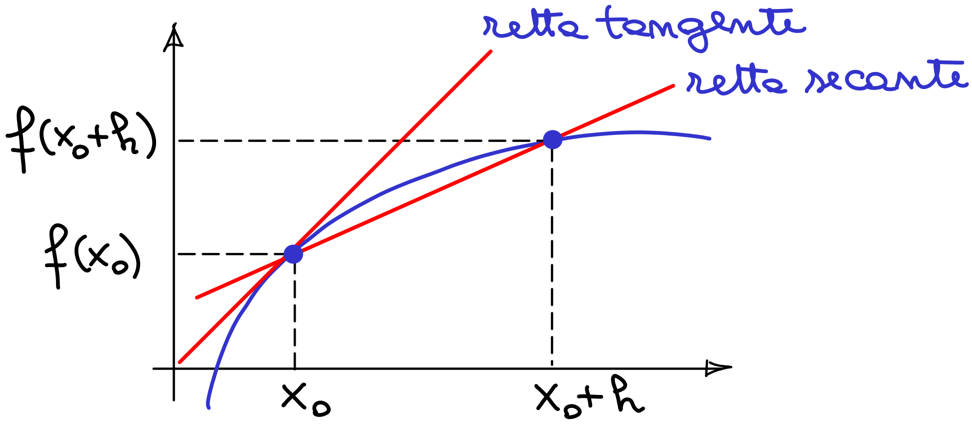
Il valore del limite $f'(x_0)$ si dice DERIVATA PRIMA DI f IN x_0

. Interpretazione geometrica:

retta secante $\quad y = \Big(\underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\text{RAPPORTO INCREMENTALE}}\Big)(x-x_0) + f(x_0)$

RETTA TANGENTE $\quad y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$

al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$



OSSERVAZIONE

Se f è derivabile in x_0 allora f è continua in x_0:
per $x \to x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \Big(\overbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}^{\to f'(x_0)}\Big) \cdot \overbrace{(x-x_0)}^{\to 0} \longrightarrow f(x_0)$$

DERIVATE DI FUNZIONI ELEMENTARI

1) $f(x) = mx + q \Rightarrow f'(x) = m$

dim. Se $x \in \mathbb{R}$ allora per $h \to 0$

$$\frac{m(\cancel{x}+h)+\cancel{q}-(\cancel{mx}+\cancel{q})}{h} = m \to m \qquad \square$$

2) $f(x) = x^b \Rightarrow f'(x) = b\,x^{b-1}$

dim. Se $x \in D$ e $x \neq 0$ allora per $h \to 0$,

$$\frac{(x+h)^b - x^b}{h} = x^b \cdot \left(\underbrace{\frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^b - 1}{\frac{h}{x}}}_{\to b} \right) \cdot \frac{1}{x} \to b x^{b-1}$$

Se $x=0$ e $b>0$ allora per $h \to 0$

$$\frac{h^b - 0^b}{h} = h^{b-1} \to \begin{cases} 0 & \text{se } b>1 \\ 1 & \text{se } b=1 \\ +\infty & \text{se } 0<b<1 \quad \text{NON DERIVABILE} \end{cases} \qquad \square$$

Ad esempio:

$f(x) = x^3 \xRightarrow{b=3} \forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = 3x^2$

$f(x) = \sqrt{x} \xRightarrow{b=\frac{1}{2}} \forall x>0 \quad f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x) = \frac{1}{x} \xRightarrow{b=-1} \forall x \neq 0 \quad f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

3) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

dim. Se $x \in \mathbb{R}$ allora per $h \to 0$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \cdot \left(\underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} \right) \to e^x \qquad \square$$

4) $f(x)=\log(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

dim Se $x>0$ allora per $h\to 0$

$$\frac{\log(x+h)-\log(x)}{h}=\left(\frac{\log(1+\overbrace{\tfrac{h}{x}}^{\to 1})}{\frac{h}{x}}\right)\cdot\frac{1}{x}\to\frac{1}{x}\qquad\square$$

5) $f(x)=\operatorname{sen}(x) \Rightarrow f'(x)=\cos(x)$

dim. Se $x\in\mathbb{R}$ allora per $h\to 0$

$$\operatorname{sen}(x+h)=\operatorname{sen}(x)\cdot\cos(h)+\cos(x)\operatorname{sen}(h)$$

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h}=\operatorname{sen}(x)\cdot\overbrace{\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)}^{\to 0}+\cos(x)\cdot\overbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right)}^{\to 1}$$

$$\to\cos(x)\qquad\square$$

6) $f(x)=\cos(x) \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{sen}(x)$

dim. Se $x\in\mathbb{R}$ allora per $h\to 0$

$$\cos(x+h)=\cos(x)\cdot\cos(h)-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)$$

$$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}=\cos(x)\cdot\overbrace{\left(\frac{\cos(h)-1}{h}\right)}^{\to 0}-\operatorname{sen}(x)\cdot\overbrace{\left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right)}^{\to 1}$$

$$\to-\operatorname{sen}(x)\qquad\square$$

7) $f(x)=\operatorname{arcsen}(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8) $f(x)=\arccos(x) \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

9) $f(x)=\operatorname{arctg}(x) \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$

REGOLE DI DERIVAZIONE

Siano f e g funzioni derivabili.

LINEARITÀ:

$$\forall a,b\in\mathbb{R} \quad (af+bg)'(x)=af'(x)+bg'(x)$$

DERIVATA DEL PRODOTTO:

$$(f\cdot g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

DERIVATA DEL QUOZIENTE: se $g(x)\neq 0$ allora

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

DERIVATA DELLA COMPOSIZIONE $(g\circ f)(x)=g(f(x))$:

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

ESEMPI

- $f(x)=3\log(x)+5\sqrt[4]{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{x}+\frac{5}{4}x^{-\frac{3}{4}}$
- $f(x)=x^2\cos(x) \Rightarrow f'(x)=2x\cos(x)+x^2(-\operatorname{sen}(x))$
- $f(x)=\operatorname{tg}(x)=\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{\cos(x)\cdot\cos(x)-\operatorname{sen}(x)(-\operatorname{sen}(x))}{(\cos(x))^2}$$

$$=\frac{\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)}{(\cos(x))^2}=\frac{1}{(\cos(x))^2}$$

$$=1+\operatorname{tg}^2(x)$$ espressione alternativa

- $f(x) = x \cdot \cos(x) \cdot \operatorname{arcsen}(x)$

$$\Rightarrow f'(x) = (x \cdot \cos(x))' \cdot \operatorname{arcsen}(x) + \frac{x \cdot \cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= (\cos(x) + x(-\operatorname{sen}(x))) \cdot \operatorname{arcsen}(x) + \frac{x \cdot \cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$$

- $f(x) = \dfrac{\log(x)}{\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \log(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}$

- $f(x) = a^x = e^{x \log(a)} \Rightarrow f'(x) = e^{x \log(a)} \cdot \log(a)$

$$= a^x \cdot \log(a)$$

- $f(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x)} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\operatorname{sen}(x)}} \cdot \cos(x)$

- $f(x) = \operatorname{arctg}(e^{x^2}) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^{x^2} \cdot 2x}{1 + (e^{x^2})^2}$

- $f(x) = \log(1 + x \cdot \operatorname{tg}(x))$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{0 + \operatorname{tg}(x) + x(1 + \operatorname{tg}^2(x))}{1 + x \cdot \operatorname{tg}(x)}$$

- $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \Rightarrow$

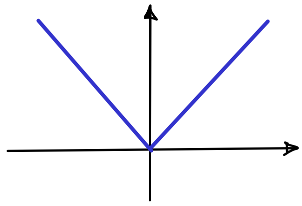
$$f'(x) = \exp\left(x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) \cdot \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \, \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)$$

OSSERVAZIONE

Se $f(x)=|x|$ allora per $x>0$, $f(x)=x$ e $f'(x)=1$ mentre per $x<0$, $f(x)=-x$ e $f'(x)=-1$.
Quindi $|x|$ è derivabile in $x\neq 0$:

$$(|x|)'=\begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$$



In $x=0$, $|x|$ non è derivabile perché

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}} = 1$$ derivata destra in 0

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\cancel{h}}{\cancel{h}} = -1$$ derivata sinistra in 0

In generale, se i limiti esistono, si pone

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_+(x_0)$$ DERIVATA DESTRA di f in x_0

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$$ DERIVATA SINISTRA di f in x_0