ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 9

ESEMPI

- $$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$\operatorname{sen}(x^2) = 1-\cos^2(x)$

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)} = \Big(\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\to 1}\Big)^2 \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{1+\cos(x)}}_{\to \frac{1}{2}}\Big) \to \frac{1}{2}$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \Big(\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\to 1}\Big) \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1}\Big) = 1$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen}(x)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{sen}(y)} = 1$$

$y = \operatorname{arcsen}(x) \to 0$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x)}{x} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg}(y)} = 1$$

$y = \operatorname{arctg}(x) \to 0$

- $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0$$

Per $x \to \pm\infty$, $0 \le \left|\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\right| \le \frac{1}{|x|} \to 0$

- $$\lim_{x\to \pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen}(y+\pi)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(y)}{y} = -1$$

$y = x-\pi \to 0$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{tg}(x)}{x^3}$$

$\operatorname{sen}(x) - \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = \operatorname{sen}(x)\frac{(\cos(x)-1)}{\cos(x)}$

$$= \lim_{x\to 0} \Big(\underbrace{\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}_{\to 1}\Big) \cdot \Big(\underbrace{\frac{\cos(x)-1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}}\Big) \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\to 1}\Big) = -\frac{1}{2}.$$

CONFRONTI TRA INFINITESIMI

Se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ e supponiamo che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0 \\ l \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ \pm\infty \end{cases}$$

1) nel caso 0 diciamo che per $x\to x_0$, $f(x)$ è un INFINITESIMO DI ORDINE SUPERIORE a $g(x)$
2) nel caso $l\neq 0$ diciamo che per $x\to x_0$, $f(x)$ è un INFINITESIMO DELLO STESSO ORDINE di $g(x)$
3) nel caso $\pm\infty$ diciamo che per $x\to x_0$, $f(x)$ è un INFINITESIMO DI ORDINE INFERIORE a $g(x)$

Se $\alpha>0$, per $x\to x_0$, $(x-x_0)^\alpha$ è un infinitesimo di ordine α.

ESEMPI

- $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^3-3x^2+4x}{x^2-x^a} =$? con $a>0$ e $a\neq 2$

Se $0<a<2$ allora per $x\to 0^+$

$$\frac{2x^3-3x^2+4x}{x^2-x^a} = \frac{x(2\overset{\to 0}{x^2}-3\overset{\to 0}{x}+4)}{x^a(\underset{\to 0}{x^{2-a}}-1)} \longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } 0<a<1 \\ -4 & \text{se } a=1 \\ -\infty & \text{se } 1<a<2 \end{cases}$$

Se $2<a$ allora per $x\to 0^+$

$$\frac{2x^3-3x^2+4x}{x^2-x^a} = \frac{\cancel{x}(2\overset{\to 0}{x^2}-3\overset{\to 0}{x}+4)}{x^{\cancel{2}}(1-\underset{\to 0}{x^{a-2}})} \longrightarrow +\infty$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-e^{x^2}}{\sin^2(x)} = -\frac{3}{2}$$

$$\frac{\cos(x)-e^{x^2}}{\sin^2(x)} = \Bigg(\underbrace{\frac{\cos(x)-1}{x^2}}_{\to -\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1-e^{x^2}}{x^2}}_{\to -1}\Bigg)\cdot\Bigg(\underbrace{\frac{x}{\sin(x)}}_{\to 1}\Bigg)^2 \to -\frac{3}{2}$$

- $$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2} = 2$$

$$\frac{x-2x}{x^2-3x+2} = \frac{x\cancel{(x-2)}}{(x-1)\cancel{(x-2)}} \longrightarrow \frac{2}{2-1} = 2$$

- $$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x))}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\log(\cos(x))}{x^2} = \left(\frac{\log(1+\overbrace{(\cos(x)-1)}^{\to 0})}{\underbrace{(\cos(x)-1)}_{\to 0}}\right)\cdot\left(\frac{\cos(x)-1}{x^2}\right) \to 1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

- $$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}(x)\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\mathrm{tg}(y)} = 1$$

$$y = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(x) \to 0$$
$$x = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-y\right) = \frac{1}{\mathrm{tg}(y)}$$

- $$\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x\right) = \frac{2}{3}$$

$$\sqrt[3]{x^3+2x^2+1} - x = x\left(\left(1+\overbrace{\left(\frac{2x^2+1}{x^3}\right)}^{\to 0}\right)^{1/3} - 1\right)$$

$$= \Bigg(\underbrace{x\cdot\frac{2x^2+1}{x^3}}_{\to 2}\Bigg)\cdot\Bigg(\underbrace{\frac{\left(1+\frac{2x^2+1}{x^3}\right)^{1/3}-1}{\frac{2x^2+1}{x^3}}}_{\to \frac{1}{3}}\Bigg) \longrightarrow \frac{2}{3}$$

PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE (1^a PARTE)

TEOREMA (DEGLI ZERI) Se f è una funzione continua in $[a,b]$ e $f(a)\cdot f(b)<0$ allora $\exists\, x_0 \in (a,b)$ tale che $f(x_0)=0$.

dim. Caso $f(a)<0$ e $f(b)>0$. Costruiamo ricorsivamente due successioni $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ nel seguente modo: $a_0=a$, $b_0=b$ e dati $a_0, a_1, \dots, a_n$ e $b_0, b_1, \dots, b_n$ sia

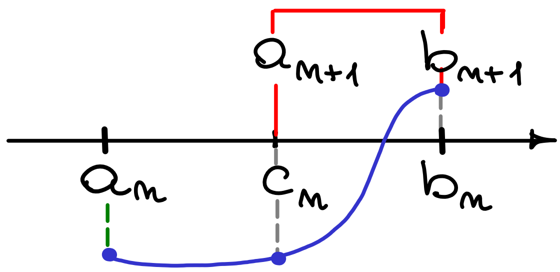
$$c_n=\frac{a_n+b_n}{2} \quad \text{PUNTO MEDIO di } [a_n,b_n]$$

Abbiamo 3 casi possibili (ed esclusivi).

1) Se $f(c_n)=0$ allora $x_0=c_n$ e abbiamo finito.

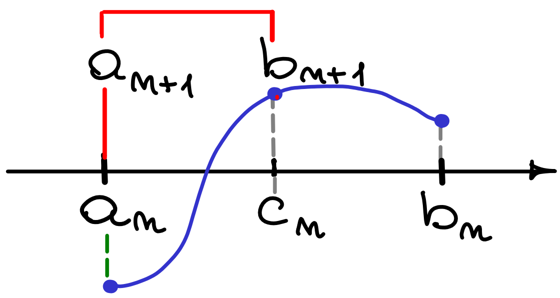
2) Se $f(c_n)<0$ allora poniamo

$a_{n+1}=c_n$ e $b_{n+1}=b_n$



3) Se $f(c_n)>0$ allora poniamo

$a_{n+1}=a_n$ e $b_{n+1}=c_n$



Se 1) non si verifica mai, $\{a_n\}_n$ e $\{b_n\}_n$ sono tali che

$\{a_n\}$ è sup. limitata $\qquad$ $\{b_n\}$ è decrescente

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad a_n \le a_{n+1} < b \quad e \quad a < b_{n+1} \le b_n$$

$\{a_n\}$ è crescente $\qquad$ $\{b_n\}$ è inf. limitata

e quindi convergono entrambe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n,\ n\geq 0\} = A \qquad \text{con } a\le A\le B\le b$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \inf\{a_n,\ n\geq 0\} = B$$

Inoltre al passo n-simo l'intervallo $[a,b]$ è stato diviso a metà n volte e quindi

$$B-A \xleftarrow{n\to\infty} b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow B=A$$

Chiamiamo questo valore comune x_0 e verifichiamo che $f(x_0)=0$.

Dato che f è continua in $x_0\in[a,b]$,

$$a_n \to x_0 \Rightarrow \overbrace{f(a_n)}^{<0} \to f(x_0)\le 0$$

permanenza del segno

$$b_n \to x_0 \Rightarrow \underbrace{f(b_n)}_{>0} \to f(x_0)\ge 0$$

Così $0\le f(x_0)\le 0$ ossia $f(x_0)=0$. $\square$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (DEI VALORI INTERMEDI)

Se f è una funzione continua in $[a,b]$ e y_0 è un valore compreso strettamente tra $f(a)$ e $f(b)$ allora $\exists\, x_0\in(a,b)$ tale che $f(x_0)=y_0$.

OSSERVAZIONE

Se f è una funzione continua in un intervallo I allora l'insieme immagine $f(I)$ è ancora un intervallo.

$\boxed{\text{ESEMPIO}}$

Contare il numero di soluzioni di ciascuna delle seguenti equazioni:

1) $2^x = \sin(\pi x)$

2) $\arcsin(2^x) = \pi x$

L'equazione 1) ha infinite soluzioni.

Sia $f(x) = 2^x - \sin(\pi x)$. f è continua in $\mathbb{R}$ e

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ \quad f(-2n) = 2^{-2n} - 0 > 0$$
$$f\left(-2n + \tfrac{1}{2}\right) = 2^{-2n+\frac{1}{2}} - 1 < 0$$

e per il teorema degli zeri $\exists\, x_n \in \left(-2n, -2n + \frac{1}{2}\right)$ tale che $f(x_n) = 0$.

L'equazione 2) non ha soluzioni.

Sia $f(x) = \arcsin(2^x) - \pi x$. f è continua in

$$D = \{x : 2^x \in [-1, 1]\} = (-\infty, 0].$$

Inoltre $\forall x \leq 0$,

$$f(x) = \underbrace{\arcsin(\overset{>0}{2^x})}_{>0} + \underbrace{(-\pi x)}_{\geq 0} > 0.$$

f non si annulla MAI!