ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 7

ESEMPI

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^{n-1}(n+1)!+2n^{n-2}(n+2)!}{n^{10}\cdot 10^{3n}-n!\cdot n^n} = ?$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^n}\cdot\cancel{n!}\cdot\left(3\cdot\overset{\to 1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)}+2\overset{\to 1}{\left(\frac{(n+2)(n+1)}{n^2}\right)}\right)}{\cancel{n^n}\cdot\cancel{n!}\cdot\left(\underset{\to 0}{\left(\frac{n^{10}}{n^n}\right)}\cdot\underset{\to 0}{\left(\frac{10^{3n}}{n!}\right)}-1\right)} = -5$$

- $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = ?$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\overset{\to 0}{\left(\frac{\log n}{n}\right)}} = e^0 = 1$$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!-n^n}{a^{n\log n}} = ? \quad \text{per } a>0$$

$$a^{n\log n} = e^{\log(a)\cdot n\log n} = e^{\log\left(n^{n\cdot\log(a)}\right)} = n^{n\log a}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^n\left(\frac{n!}{n^n}-1\right)}{n^{n\log a}} = \lim_{n\to\infty} n^{n(1-\log a)}\cdot\left(\overset{\to 0}{\left(\frac{n!}{n^n}\right)}-1\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } a>e \qquad 1-\log a<0 \\ -1 & \text{se } a=e \qquad 1-\log a=0 \\ -\infty & \text{se } 0<a<e \qquad 1-\log a>0 \end{cases}$$

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{\sqrt{n}}}{(\sqrt{n+1})^n} = ?$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\sqrt{n}\log n - \frac{n}{2}\log(n+1)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \exp\left(\underset{\to +\infty}{(n\log n)}\left(\underset{\to 0}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}-\underset{\to 1/2}{\left(\frac{\log(n+1)}{2\log n}\right)}\right)\right) = e^{-\infty} = 0.$$

$\boxed{\text{IL NUMERO DI NEPERO } e}$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ La successione $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n\geq 1}$ è convergente e il suo limite è detto NUMERO DI NEPERO e: $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

OSSERVAZIONE Si dimostra che $e \notin \mathbb{Q}$ e il suo valore è

$$e = 2{,}718281828459\ldots$$

dim. Verifichiamo la convergenza dimostrando che 1) la successione è strettamente crescente e 2) la successione è superiormente limitata e dunque il limite esiste e vale

$$\sup\left(\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N}^+\right\}\right) \in \mathbb{R}.$$

1) Stretta crescenza: $\forall n \geq 1$ $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} + \left(\overset{>0}{\frac{1}{(n+1)^{n+1}}}\right)$$

$$> \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

perché

$$\binom{n+1}{k}\frac{1}{(n+1)^k} = \underset{j=0\ \geq}{\frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+1}}} \cdot \underset{j=1\ \geq}{\frac{n}{n+1}} \cdots \underset{j=k-1\ \geq}{\frac{n+1-k+1}{n+1}} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$\geq$$

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \cdot \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{k!}$$

per $j \geq 0$ $\frac{n+1-j}{n+1} \geq \frac{n-j}{n} \iff \cancel{n^2}+\cancel{n}-\cancel{nj} \geq \cancel{n^2}+\cancel{n}-\cancel{nj}-j$

$\iff j \geq 0$

2) Limitatezza superiore: $\forall n \geq 2$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = 1+1+\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k}$$

$$\leq 2+\sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 2+\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\dots+\left(\cancel{\frac{1}{n-1}}-\frac{1}{n}\right)$$

$$= 2+1-\frac{1}{n} < 3$$

perché

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} \cdot \overbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)}^{\leq 1} \cdots \overbrace{\left(\frac{n-k+1}{n}\right)}^{\leq 1} \cdot \frac{1}{k!}$$

$$\leq \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

Quindi la successione ha 3 come maggiorante e dunque è limitata superiormente. $\square$

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$ perché $\{n^2\}_{n\geq 1}$ è una sottosucc. di $\{n\}_{n\geq 1}$

- $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e}$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} = \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}_{\to e} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}_{\to 1}\right)^{-1}.$$

- $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = +\infty$

Per confronto:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\right)^n \geq 2^n \to +\infty$$

definitivamente perché $e>2$

• $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = 1$

Per doppio confronto:

$$1 \le \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}_{\to e}\right)^{1/n} \le 3^{1/n} \longrightarrow 1$$

definitivamente perché $e<3$

• Se $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ allora

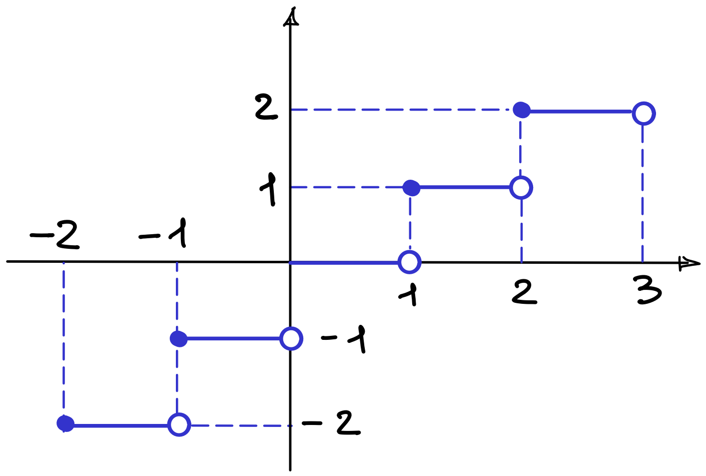
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Per doppio confronto:

$$\underbrace{\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor+1}\right)^{\lfloor a_n\rfloor}}_{\to e} \le \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \le \underbrace{\left(1+\frac{1}{\lfloor a_n\rfloor}\right)^{\lfloor a_n\rfloor+1}}_{\to e}$$

dove $\lfloor x\rfloor$ è la funzione PARTE INTERA

$\forall x\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{Z}\quad \lfloor x\rfloor = n$ se $x\in[n,n+1)$



$\lfloor x\rfloor$ è il più grande intero $n\le x$

• Se $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ allora

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e.$$

Posto $b_n = -(a_n+1) \to +\infty$ e

$$\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = \underbrace{\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}}_{\to e}\cdot\underbrace{\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{-1}}_{\to 1} \longrightarrow e.$$

- Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$ (+∞ oppure −∞) allora per ogni $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = e^x.$$

Per $x=0$ è ovvio. Per $x\neq 0$, $b_n = \frac{a_n}{x} \longrightarrow \pm\infty$ e

$$\left(1+\frac{x}{a_n}\right)^{a_n} = \left(\left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n}\right)^x \longrightarrow e^x$$

- Se $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ e $a_n \neq 0$ allora per ogni $x\in\mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty}(1+xa_n)^{1/a_n} = e^x.$$

Caso $a_n \to 0^+$. Allora $b_n = 1/a_n = +\infty$ e

$$(1+xa_n)^{1/a_n} = \left(1+\frac{x}{b_n}\right)^{b_n} \longrightarrow e^x.$$

- $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+1}\right)^{2n} = ?$$

Per $n\to\infty$, $a_n = \frac{3n+1}{n^2+1} \longrightarrow 0$ e

$$\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+1}\right)^{2n} = \left(\underbrace{\left(1+\frac{3n+1}{n^2+1}\right)^{\frac{n^2+1}{3n+1}}}_{\to e}\right)^{\overbrace{\left(\frac{3n+1}{n^2+1}\cdot 2n\right)}^{\to 6}} \longrightarrow e^6$$

$$\frac{3n+1}{n^2+1}\cdot 2n = \frac{6n^2+2n}{n^2+1} = \frac{\cancel{n^2}\left(6+\overbrace{\frac{2}{n}}^{\to 0}\right)}{\cancel{n^2}\left(1+\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0}\right)} \longrightarrow 6$$

• Se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ allora

1) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \log\left((1+a_n)^{1/a_n}\right) = \log(e) = 1.$$

2) $$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{\log(1+b_n)} = 1.$$

$b_n = e^{a_n} - 1 \to 0$

$\Rightarrow a_n = \log(1+b_n)$

3) Per $\alpha \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \overbrace{\left(\frac{e^{b_n}-1}{b_n}\right)}^{\to 1} \cdot \alpha \overbrace{\left(\frac{\log(1+a_n)}{a_n}\right)}^{\to 1} = \alpha.$$

$b_n = \alpha \log(1+a_n) \to 0$

$e^{b_n} = (1+a_n)^\alpha$