ANALISI MATEMATICA 1 - LEZIONE 6

ESEMPI

- $$\lim_{n\to\infty}\left(n^2+(-1)^n n\right)=\lim_{n\to\infty}\overbrace{n^2}^{\to+\infty}\Big(1+\underbrace{\Big(\frac{(-1)^n}{n}\Big)}_{\to 0}\Big)=+\infty$$

- $$\lim_{n\to\infty}\log_a(n)=\begin{cases}+\infty & \text{se } a>1\\ -\infty & \text{se } 0<a<1\end{cases}$$

- $$\lim_{n\to\infty}\log_a\left(\frac{1}{n}\right)=\begin{cases}-\infty & \text{se } a>1\\ +\infty & \text{se } 0<a<1\end{cases}$$ $\log_a\left(\frac{1}{n}\right)=-\log_a(n)$

- $$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arctg}(n)\cdot n-\overbrace{n^2\sqrt{n}}^{n^{5/2}}}{\underbrace{2\cdot n\cdot\sqrt{n^3}}_{n^{5/2}}+3\cdot e^{-n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^{5/2}}\Big(\overbrace{\operatorname{arctg}(n)}^{\to\pi/2}\cdot\overbrace{n^{-3/2}}^{\to 0}-1\Big)}{\cancel{n^{5/2}}\Big(2+\underbrace{3\cdot e^{-n}n^{-5/2}}_{\to 0}\Big)}=-\frac{1}{2}$$

- $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+bn+c}-n\right)=+\infty-\infty$$
con $b,c\in\mathbb{R}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+bn+c}-n\right)\cdot\frac{\sqrt{n^2+bn+c}+n}{\sqrt{n^2+bn+c}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n^2}+bn+c-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+bn+c}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\Big(b+\overbrace{\frac{c}{n}}^{\to 0}\Big)}{\cancel{n}\Big(\sqrt{1+\underbrace{\frac{b}{n}}_{\to 0}+\underbrace{\frac{c}{n^2}}_{\to 0}}+1\Big)}=\frac{b}{2}.$$

OSSERVAZIONE

Se il limite ha la forma

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n}$$

con $a_n>0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

usando l'identità $a^b = e^{b\log(a)}$ possiamo avere altre forme indeterminate del tipo $0\cdot\infty$, ossia

$$1^{\pm\infty} = e^{\pm\infty \log(1)} = e^{\pm\infty\cdot 0}$$

$$(0^+)^0 = e^{0\cdot\log(0^+)} = e^{0\cdot(-\infty)}$$

$$(+\infty)^0 = e^{0\cdot\log(+\infty)} = e^{0\cdot(+\infty)}$$

In generale per a^b vale lo schema

a^b	$-\infty$	$b<0$	$b=0$	$b>0$	$+\infty$
0^+	$+\infty$	$+\infty$	?	0^+	0^+
$0<a<1$	$+\infty$	a^b	1	a^b	0^+
$a=1$	?	1	1	1	?
$a>1$	0^+	a^b	1	a^b	$+\infty$
$+\infty$	0^+	0^+	?	$+\infty$	$+\infty$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^n = (0^+)^{+\infty} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n = 1^{+\infty} = ?$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{\log(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{+\infty} = 0 \qquad \lim_{n\to\infty}(n+3)^{\frac{1}{n}} = (+\infty)^{0^+} = ?$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (CRITERIO DEL RAPPORTO)

Sia $\{a_n\}_n$ una successione positiva tale che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

$L \geq 0$ per la permanenza del segno

1) Se $L>1$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

2) Se $L<1$ allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

OSSERVAZIONE

Se $L=1$ allora la conoscenza di L non basta per trovare $\lim_{n\to\infty} a_n$:

se $a_n = n$ allora $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$

se $a_n = \frac{1}{n}$ allora $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

$\boxed{\text{ESEMPI}}$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$ per $b>0$ e $a>1$.

Sia $a_n = \frac{n^b}{a^n}$ allora per $n\to\infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^b}{a^{\cancel{n}+1}} \cdot \frac{\cancel{a^n}}{n^b} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^b \cdot \frac{1}{a} \longrightarrow \frac{1}{a} < 1$$

e per il criterio del rapporto $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Notiamo che se $b>0$ e $a<1$ allora per $n\to\infty$

$$\frac{n^b}{a^n} \to \frac{+\infty}{0^+} = +\infty.$$

- $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n} = +\infty$ per $a>0$.

Sia $a_n = \frac{n!}{a^n}$ allora per $n\to\infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{a^{n+1}} \cdot \frac{\cancel{a^n}}{n!} = \frac{n+1}{a} \longrightarrow +\infty > 1$$

e per il criterio del rapporto $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{n!} = +\infty$.

Sia $a_n = \frac{2^{n^2}}{n!}$ allora per $n\to\infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n^2}} = \frac{2^{\cancel{n^2}+2n+1-\cancel{n^2}}}{n+1} = 2\cdot\frac{4^n}{n+1} \longrightarrow +\infty > 1$$

e per il criterio del rapporto $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} = +\infty$.

Sia $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ allora per $n\to\infty$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$= \frac{\overset{2}{\cancel{(2n+2)}}(2n+1)\cdot\cancel{(2n)!}}{(n+1)^{\cancel{2}}\cdot\cancel{(n!)^2}} \cdot \frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}}$$

$$= \frac{4n+2}{n+1} = \frac{4+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \longrightarrow 4 > 1$$

e per il criterio del rapporto $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

CONFRONTI TRA INFINITI

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ e supponiamo

che $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} +\infty \\ l \in (0,+\infty) \\ 0 \end{cases}$$ allora

1) nel caso $+\infty$ diciamo che
a_n è un INFINITO DI ORDINE SUPERIORE a b_n

2) nel caso $l \in (0,+\infty)$ diciamo che
a_n è un INFINITO DELLO STESSO ORDINE di b_n

3) nel caso 0 diciamo che
a_n è un INFINITO DI ORDINE INFERIORE a b_n

I seguenti infiniti sono in ordine crescente

$$\log_a(n),\ n^b,\ a^n,\ n!,\ n^n$$

dove $a>1$ e $b>0$.

Abbiamo già verificato che $n!$ ha ordine superiore ad a^n che ha ordine superiore a n^b.

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

perché $$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n}\cdot\Big(\underbrace{\frac{2}{n}}_{\le 1}\cdot\underbrace{\frac{3}{n}}_{\le 1}\cdots\underbrace{\frac{n-1}{n}}_{\le 1}\cdot\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}\Big) \le \frac{1}{n} \to 0$$

e la conclusione vale per doppio confronto.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a(n)}{n^b} = 0$ per $a>1$ e $b>0$.

Per semplicità consideriamo solo il caso $b=1$.
Per $\varepsilon>0$ devo verificare che definitivamente

$$0 \leq \frac{\log_a(n)}{n} < \varepsilon \iff \log_a(n) < \varepsilon n \iff n < a^{\varepsilon n}$$

$$\iff \frac{n}{(a^\varepsilon)^n} < 1$$ che vale definitivamente perché $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(\underbrace{a^\varepsilon}_{>1})^n} = 0$.

ESEMPIO

- Confronto tra polinomi di grado $r, s \geq 1$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overset{\neq 0}{a_r} n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \dots + a_0}{\underset{\neq 0}{b_s} n^s + b_{s-1} n^{s-1} + \dots + b_0}$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{r-s} \cdot \frac{a_r + a_{r-1} \overset{\to 0}{n^{-1}} + \dots + a_0 \overset{\to 0}{n^{-r}}}{b_s + b_{s-1} \underset{\to 0}{n^{-1}} + \dots + b_0 \underset{\to 0}{n^{-s}}}$$

$$= \begin{cases} +\infty & \text{se } r>s \text{ e } a_r \cdot b_s > 0 \\ -\infty & \text{se } r>s \text{ e } a_r \cdot b_s < 0 \\ \frac{a_r}{b_s} & \text{se } r=s \\ 0 & \text{se } r<s \end{cases}$$